ΓΕΝΙΚΕΣ ΕΙΣΙΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 1969
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΑΛΓΕΒΡΑ
ΦΥΣΙΚΟΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ ΚΥΚΛΟΣ
Σάββατο 13 Σεπτεμβρίου 1969

Ζήτημα 1ο

Ὥστε : *ἀκολουθία πραγματικῶν ἀριθμῶν εἶναι κάθε συνάρτησις μὲ πεδίον ὁρισμοῦ τὸ σύνολον* **N** *τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν καὶ τιμὰς εἰς τὸ σύνολον* **R** *τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν*, δηλαδὴ *μία μονοσήμαντος ἀπεικόνισις τοῦ* **N** *εἰς τὸ* **R**.

Γενικῶς θὰ λέγωμεν : *«ἡ ἀκολουθία* α_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ *πραγματικῶν ἀριθμῶν* **συγκλίνει πρὸς τὸν πραγματικὸν ἀριθμὸν α** ἢ ἄλλως τείνει πρὸς τὸν πραγματικὸν ἀριθμὸν α καὶ θὰ συμβολίζωμεν τοῦτο μέ : $\alpha_\nu \to \alpha$ *τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν ἡ ἀκολουθία* $(\alpha_\nu - \alpha)$, $\nu = 1, 2, \ldots$, δηλαδὴ ἡ ἀκολουθία :

$$\alpha_1 - \alpha,\ \alpha_2 - \alpha,\ \alpha_3 - \alpha, \ldots, \alpha_\nu - \alpha, \ldots$$

εἶναι μηδενική.

Γενικῶς : *Μία ἀκολουθία πραγματικῶν ἀριθμῶν* α_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ *καλεῖται* **μηδενικὴ ἀκολουθία** *καὶ θὰ συμβολίζωμεν τοῦτο μὲ* $\alpha_\nu \to 0$ *τότε, καὶ μόνον τότε, ἄν : διὰ κάθε* $\varepsilon > 0$ *ὑπάρχῃ δείκτης* $\nu_0 = \nu_0(\varepsilon)$ (ἐξαρτώμενος, ἐν γένει, ἐκ τοῦ ε) *τοιοῦτος, ὥστε νὰ ἰσχύῃ :*

$$|\alpha_\nu| < \varepsilon \quad \text{διὰ κάθε} \quad \nu \geqq \nu_0(\varepsilon).$$

Συντόμως, μὲ χρῆσιν τῶν γνωστῶν μας συμβόλων, ὁ ὁρισμὸς οὗτος δίδεται ὡς ἑξῆς :

$$\boxed{\alpha_\nu \to 0 \underset{\text{ορσ}}{\iff} \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\ \nu_0 = \nu_0(\varepsilon) : |\alpha_\nu| < \varepsilon \quad \forall \quad \nu \geqq \nu_0}$$

§ 125. Ἰδιότης IV.— Τὸ ἄθροισμα ἢ ἡ διαφορὰ δύο μηδενικῶν ἀκολουθιῶν εἶναι μηδενικὴ ἀκολουθία.

Ἤτοι : $$\boxed{\textbf{Ἐάν :} \quad \left.\begin{array}{l} \alpha_\nu \to 0 \\ \beta_\nu \to 0 \end{array}\right\} \implies \alpha_\nu \pm \beta_\nu \to 0}$$

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ κατὰ τὴν ὑπόθεσιν αἱ α_ν καὶ β_ν, $\nu = 1,2,\ldots$ εἶναι μηδενικαὶ ἀκολουθίαι θὰ ἔχωμεν, συμφώνως πρὸς τὸν ὁρισμὸν μηδενικῆς ἀκολουθίας : Διὰ κάθε $\varepsilon > 0$, ἄρα καὶ διὰ $\frac{\varepsilon}{2} > 0$, ὑπάρχει δείκτης $\nu_0'\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ καὶ $\nu_0''\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$, ὥστε νὰ ἰσχύῃ :

$$|\alpha_\nu| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{διὰ κάθε} \quad \nu \geqq \nu_0'\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \equiv \nu_0' \qquad (1)$$

$$|\beta_\nu| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{διὰ κάθε} \quad \nu \geqq \nu_0''\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \equiv \nu_0''. \qquad (2)$$

Ἐὰν καλέσωμεν $\nu_0(\varepsilon)$ τὸν μέγιστον τῶν $\nu_0'\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ καὶ $\nu_0''\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$, ἤτοι ἂν $\nu_0(\varepsilon) \equiv \max(\nu_0', \nu_0'')$, τότε διὰ κάθε $\nu \geqq \nu_0(\varepsilon)$, αἱ ἀνισότητες (1) καὶ (2) πληροῦνται συγχρόνως καὶ ἑπομένως θὰ ἔχωμεν :

$$|\alpha_\nu \pm \beta_\nu| \leqq |\alpha_\nu| + |\beta_\nu| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \text{διὰ κάθε} \quad \nu \geqq \nu_0(\varepsilon),$$

ἤτοι : $|\alpha_\nu + \beta_\nu| < \varepsilon$ καὶ $|\alpha_\nu - \beta_\nu| < \varepsilon$ διὰ κάθε $\nu > \nu_0(\varepsilon)$.

Αἱ τελευταῖαι ἀνισότητες μᾶς πληροφοροῦν ὅτι αἱ ἀκολουθίαι : $\alpha_\nu + \beta_\nu$, καὶ $\alpha_\nu - \beta_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots$ εἶναι μηδενικαί.

§ 124. Ἰδιότης III.— **Κάθε μηδενικὴ ἀκολουθία εἶναι φραγμένη.**

Ἤτοι : **Ἐὰν $\alpha_\nu \to 0$, τότε $\alpha_\nu,\ \nu = 1, 2, \ldots$ εἶναι φραγμένη.**

Ἀπόδειξις. Ἂς ἐφαρμόσωμεν τὸν ὁρισμὸν τῆς μηδενικῆς ἀκολουθίας διὰ $\varepsilon = 1 > 0$, τότε ὑπάρχει δείκτης $\nu_0 = \nu_0(\varepsilon)$ τοιοῦτος, ὥστε νὰ ἰσχύῃ :

$$|\alpha_\nu| < 1 \quad \forall \quad \nu > \nu_0. \tag{1}$$

Ἔστω τώρα $\quad A \equiv \max(|\alpha_1|, |\alpha_2|, \ldots, |\alpha_\nu|)$.

Τότε θὰ ἔχωμεν :

$$|\alpha_\nu| \leqq A < A + 1 \quad \forall \quad \nu = 1, 2, \ldots, \nu_0. \tag{2}$$

Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) προκύπτει :

$$|\alpha_\nu| < A + 1 \equiv \varphi \quad \forall \quad \nu \in \mathbf{N}.$$

Ὅθεν ἡ $\alpha_\nu,\ \nu = 1, 2, \ldots$ εἶναι φραγμένη.

§ 126. Ἰδιότης V.— **Τὸ γινόμενον μηδενικῆς ἀκολουθίας ἐπὶ φραγμένην εἶναι μηδενικὴ ἀκολουθία.**

Ἤτοι : $$\boxed{\textbf{Ἐὰν} \left.\begin{array}{l} \alpha_\nu \to 0 \\ \beta_\nu,\ \nu = 1, 2, \ldots \ \textbf{φραγμένη} \end{array}\right\} \Longrightarrow \alpha_\nu \beta_\nu \to 0}$$

Ἀπόδειξις: Ἔστω φ ἓν φράγμα τῆς ἀκολουθίας $\beta_\nu,\ \nu = 1, 2, \ldots$ Τότε ἔχομεν :

$$|\beta_\nu| \leqq \varphi \quad \text{διὰ κάθε} \quad \nu = 1, 2, \ldots \tag{1}$$

Ἐξ ἄλλου, ἐπειδὴ $\alpha_\nu \to 0 \Longrightarrow \forall\ \varepsilon > 0$, ἄρα καὶ διὰ $\dfrac{\varepsilon}{\varphi} > 0$, ὑπάρχει δείκτης $\nu_0 = \nu_0\left(\dfrac{\varepsilon}{\varphi}\right)$ τοιοῦτος, ὥστε νὰ ἰσχύῃ :

$$|\alpha_\nu| < \frac{\varepsilon}{\varphi} \quad \text{διὰ κάθε} \quad \nu \geqq \nu_0. \tag{2}$$

Τότε ὅμως, διὰ κάθε $\nu \geqq \nu_0$, ἔχομεν δυνάμει τῶν (1) καὶ (2) ὅτι :

$$|\alpha_\nu \beta_\nu| = |\alpha_\nu| \cdot |\beta_\nu| < \frac{\varepsilon}{\varphi} \cdot \varphi = \varepsilon.$$

Ὥστε ἐδείχθη ὅτι :

$$\forall \ \varepsilon > 0 \ \exists \ \nu_0 = \nu_0\left(\frac{\varepsilon}{\varphi}\right) : \ |\alpha_\nu \beta_\nu| < \varepsilon \ \forall \ \nu \geqq \nu_0.$$

Ἄρα : $$\alpha_\nu \beta_\nu \to 0.$$

§ 127. Ἰδιότης VI.— **Τὸ γινόμενον δύο, ἢ γενικώτερον ἑνὸς πεπερασμένου πλήθους, μηδενικῶν ἀκολουθιῶν εἶναι μηδενικὴ ἀκολουθία.**

Ἤτοι : $$\boxed{\textbf{Ἐὰν} \left.\begin{array}{l} \alpha_\nu \to 0 \\ \beta_\nu \to 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \alpha_\nu \beta_\nu \to 0}$$

Ἀπόδειξις. Ἡ $\beta_\nu,\ \nu = 1, 2, \ldots$ ὡς μηδενικὴ ἀκολουθία εἶναι (ἰδιότης III) φραγμένη, ἄρα ἡ $\alpha_\nu \beta_\nu,\ \nu = 1, 2, \ldots,$ ὡς γινόμενον μηδενικῆς ἐπὶ φραγμένην εἶναι (ἰδιότης V) μηδενικὴ ἀκολουθία.

Ζήτημα 2^o

Από την εξίσωση $|\alpha x + y| = 2x$ προκύπτει ότι $2x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$ **(1)**

Το σύστημα γίνεται :

$$\left\{\begin{pmatrix} \alpha x + y = 2x \\ 3x + 5y = 2 \end{pmatrix} \text{ ή } \begin{pmatrix} \alpha x + y = -2x \\ 3x + 5y = 2 \end{pmatrix}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{pmatrix} (\alpha - 2)x + y = 0 \\ 3x + 5y = 2 \end{pmatrix} \text{ ή } \begin{pmatrix} (\alpha + 2)x + y = 0 \\ 3x + 5y = 2 \end{pmatrix}\right.$$

- $(\Sigma_1) : \begin{cases} (\alpha - 2)x + y = 0 \\ 3x + 5y = 2 \end{cases}$

$$D_1 = \begin{vmatrix} \alpha - 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 5(\alpha - 2) - 3 = 5\alpha - 13$$

$$D_{1x} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \text{ και } D_{1y} = \begin{vmatrix} \alpha - 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2(\alpha - 2) = 2\alpha - 4$$

▹ Αν $D_1 \neq 0 \Leftrightarrow 5\alpha - 13 \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq \frac{13}{5}$ το (Σ_1) έχει μοναδική λύση

$$x = \frac{D_{1x}}{D_1} = \frac{-2}{5\alpha - 13} \text{ και } y = \frac{D_{1y}}{D_1} = \frac{2\alpha - 4}{5\alpha - 13}$$

$$\text{(1)} \Rightarrow 5\alpha - 13 < 0 \Leftrightarrow \alpha < \frac{13}{5}$$

▹ Αν $D_1 = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{13}{5} \overset{D_{1x} \neq 0}{\Rightarrow}$ το (Σ_1) είναι αδύνατο

- $(\Sigma_2) : \begin{cases} (\alpha + 2)x + y = 0 \\ 3x + 5y = 2 \end{cases}$

$$D_2 = \begin{vmatrix} \alpha + 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 5(\alpha + 2) - 3 = 5\alpha + 7$$

$$D_{2x} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \text{ και } D_{2y} = \begin{vmatrix} \alpha + 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2(\alpha + 2) = 2\alpha + 4$$

▹ Αν $D_2 \neq 0 \Leftrightarrow 5\alpha + 7 \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq -\frac{7}{5}$ το (Σ_2) έχει μοναδική λύση

$$x = \frac{D_{2x}}{D_2} = \frac{-2}{5\alpha + 7} \text{ και } y = \frac{D_{2y}}{D_2} = \frac{2\alpha + 4}{5\alpha + 7}$$

$$\text{(1)} \Rightarrow 5\alpha + 7 < 0 \Leftrightarrow \alpha < -\frac{7}{5}$$

▹ Αν $D_2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = -\frac{7}{5} \overset{D_{2x} \neq 0}{\Rightarrow}$ το (Σ_2) είναι αδύνατο

Συνοψίζοντας :

- Αν $\alpha < -\frac{7}{5}$ το σύστημα έχει δύο λύσεις $\left(\frac{-2}{5\alpha - 13}, \frac{2\alpha + 4}{5\alpha - 13}\right)$ και $\left(\frac{-2}{5\alpha + 7}, \frac{2\alpha + 4}{5\alpha + 7}\right)$
- Αν $-\frac{7}{5} \leq \alpha < \frac{13}{5}$ το σύστημα έχει μία λύση $\left(\frac{-2}{5\alpha - 13}, \frac{2\alpha + 4}{5\alpha - 13}\right)$
- Αν $\alpha \geq \frac{13}{5}$ το σύστημα είναι αδύνατο.

Ζήτημα 3ο

α)

1η λύση

$$y = \frac{x}{x-1} \Leftrightarrow y = \frac{x-1+1}{x-1} \Leftrightarrow y = \frac{x-1}{x-1} + \frac{1}{x-1} \Leftrightarrow y = 1 + \frac{1}{x-1} \quad (1)$$

Πρέπει $x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$

• Για $x_1 < x_2 < 1 \Rightarrow x_1 - 1 < x_2 - 1 < 0 \Rightarrow \dfrac{1}{x_1 - 1} > \dfrac{1}{x_2 - 1} \Rightarrow$

$$1 + \frac{1}{x_1 - 1} > 1 + \frac{1}{x_2 - 1} \overset{(1)}{\Rightarrow} y_1 > y_2,$$

άρα είναι γνησίως φθίνουσα για $x < 1$

• Για $1 < x_1 < x_2 \Rightarrow 0 < x_1 - 1 < x_2 - 1 \Rightarrow \dfrac{1}{x_1 - 1} > \dfrac{1}{x_2 - 1} \Rightarrow$

$$1 + \frac{1}{x_1 - 1} > 1 + \frac{1}{x_2 - 1} \overset{(1)}{\Rightarrow} y_1 > y_2,$$

άρα είναι γνησίως φθίνουσα για $x > 1$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Για } x \to 1, \text{ με } x < 1 \text{ είναι } y \to -\infty \\ \text{Για } x \to 1, \text{ με } x > 1 \text{ είναι } y \to +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow$$

έχει (κατακόρυφη) ασύμπτωτη την $x = 1$

$$y = \frac{x}{x-1} \Rightarrow xy - y = x \Rightarrow xy - x = y \Rightarrow x \cdot (y-1) = y \Rightarrow x = \frac{y}{y-1} \Rightarrow$$

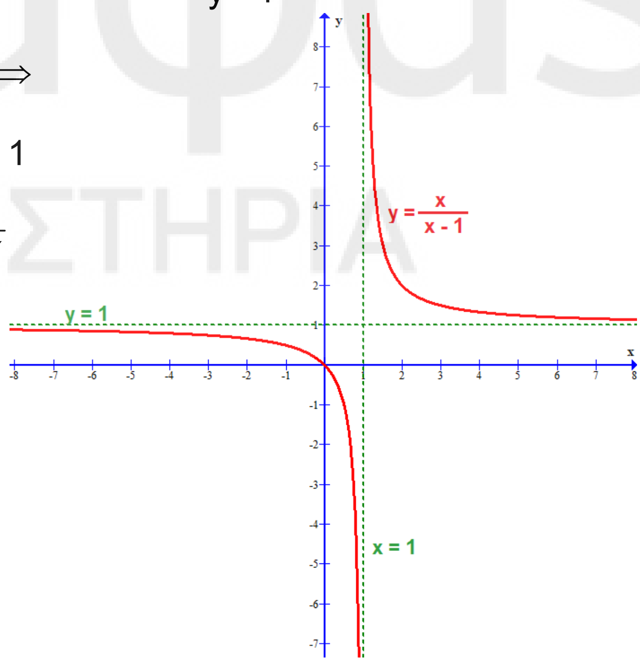
$$x = \frac{y-1+1}{y-1} \Leftrightarrow x = \frac{y-1}{y-1} + \frac{1}{y-1} \Leftrightarrow x = 1 + \frac{1}{y-1}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Για } y \to 1, \text{ με } y < 1 \text{ είναι } x \to -\infty \\ \text{Για } y \to 1, \text{ με } y < 1 \text{ είναι } x \to -\infty \end{array}\right\} \Rightarrow$$

έχει (οριζόντια) ασύμπτωτη την $y = 1$

$$(1) \Rightarrow y - 1 = \frac{1}{x-1} \underset{y-1=y'}{\overset{x-1=x'}{\Rightarrow}} y' = \frac{1}{x'}$$

Επομένως
η γραφική παράσταση είναι
καμπύλη (υπερβολή)
με κέντρο το σημείο $(1\ ,\ 1)$
και ασύμπτωτες
τις ευθείες $y = 1$ και $x = 1$



$2^{η}$ λύση

$y = σ(x) = \dfrac{x}{x-1}$

Πρέπει $x - 1 \neq 0 \iff x \neq 1$, άρα το πεδίο ορισμού είναι το IR εκτός του 1.

$$λ = \frac{σ(x_2) - σ(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{\dfrac{x_2}{x_2 - 1} - \dfrac{x_1}{x_1 - 1}}{x_2 - x_1} = \frac{\dfrac{x_2(x_1 - 1)}{(x_1 - 1)(x_2 - 1)} - \dfrac{x_1(x_2 - 1)}{(x_1 - 1)(x_2 - 1)}}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{\dfrac{x_2(x_1 - 1) - x_1(x_2 - 1)}{(x_1 - 1)(x_2 - 1)}}{x_2 - x_1} = \frac{\dfrac{\cancel{x_1x_2} - x_2 \cancel{- x_1x_2} + x_1}{(x_1 - 1)(x_2 - 1)}}{x_2 - x_1} = \frac{\dfrac{-(x_2 - x_1)}{(x_1 - 1)(x_2 - 1)}}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{-\cancel{(x_2 - x_1)}}{(x_1 - 1)(x_2 - 1)\cancel{(x_2 - x_1)}} = \frac{-1}{(x_1 - 1)(x_2 - 1)}$$

- Για $x_1, x_2 \in (-\infty\ ,\ 1)$ είναι $λ < 0$

 Αν $x_1 < x_2 < 1$, τότε $x_2 - x_1 > 0 \overset{λ<0}{\Rightarrow} σ(x_2) - σ(x_1) < 0 \Rightarrow σ(x_1) > σ(x_2)$

 άρα η συνάρτηση σ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty\ ,\ 1)$.

- Για $x_1, x_2 \in (1\ ,\ +\infty)$ επίσης είναι $λ < 0$

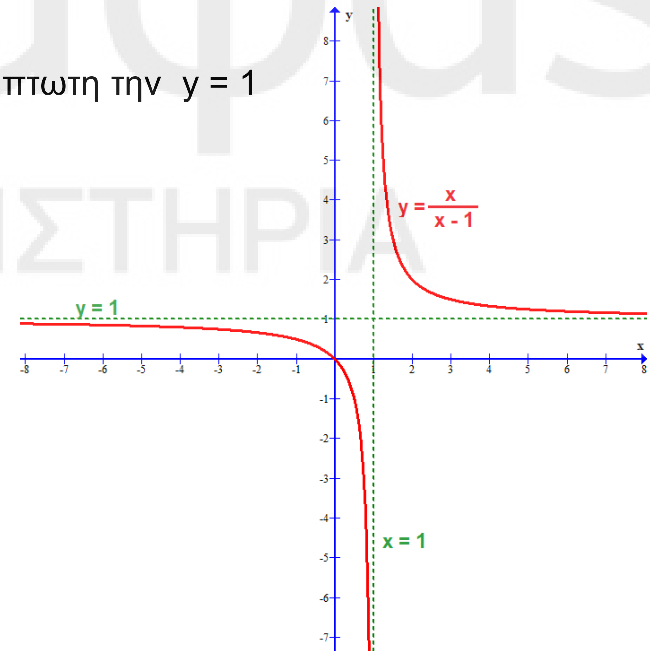
 Αν $1 < x_1 < x_2$, τότε $x_2 - x_1 > 0 \overset{λ<0}{\Rightarrow} σ(x_2) - σ(x_1) < 0 \Rightarrow σ(x_1) > σ(x_2)$

 άρα η συνάρτηση σ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(1\ ,\ +\infty)$.

$$\left.\begin{array}{l} \underset{x\to 1^-}{\text{ορ}}\ y = -\infty \\ \underset{x\to 1^+}{\text{ορ}}\ y = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \text{έχει (κατακόρυφη) ασύμπτωτη την } x = 1$$

$$\left.\begin{array}{l} \underset{x\to -\infty}{\text{ορ}}\ y = 1 \\ \underset{x\to +\infty}{\text{ορ}}\ y = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{έχει (οριζόντια) ασύμπτωτη την } y = 1$$

Επομένως
η γραφική παράσταση είναι
καμπύλη (υπερβολή)
με ασύμπτωτες
τις ευθείες $y = 1$ και $x = 1$
και κέντρο το σημείο $(1\ ,\ 1)$
(σημείο τομής των ασυμπτώτων)



$3^η$ λύση

$$f(x) = \frac{x}{x-1}$$

Πρέπει $x - 1 \neq 0 \iff x \neq 1$, άρα $D_f = IR - \{1\}$.

$$f'(x) = \left(\frac{x}{x-1}\right)' = \frac{(x)'\cdot(x-1) - x\cdot(x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{x-1-x}{(x-1)^2} = -\frac{1}{(x-1)^2} < 0$$

άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty, 1)$ και $(1, +\infty)$

$$f''(x) = \left[-\frac{1}{(x-1)^2}\right]' = \left[-(x-1)^{-2}\right]' = 2\cdot(x-1)^{-3} = \frac{2}{(x-1)^3}$$

- Για $x \in (-\infty, 1)$ είναι $f''(x) < 0$, άρα η f είναι κοίλη στο $(-\infty, 1)$
- Για $x \in (1, +\infty)$ είναι $f''(x) > 0$, άρα η f είναι κυρτή στο $(1, +\infty)$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to 1^-} f(x) &= \lim_{x\to 1^-}\frac{x}{x-1} = -\infty \\ \lim_{x\to 1^+} f(x) &= \lim_{x\to 1^+}\frac{x}{x-1} = +\infty \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την } x = 1$$

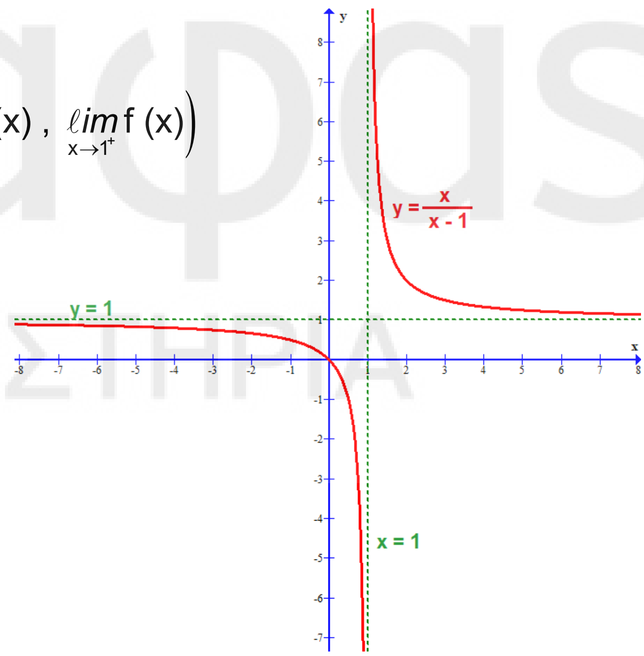
$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to -\infty} f(x) &= \lim_{x\to -\infty}\frac{x}{x-1} = 1 \\ \lim_{x\to +\infty} f(x) &= \lim_{x\to +\infty}\frac{x}{x-1} = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο } \pm\infty \text{ την } y = 1$$

Σύνολο τιμών της f :

$$f(A) = \left(\lim_{x\to 1^-} f(x), \lim_{x\to -\infty} f(x)\right) \cup \left(\lim_{x\to +\infty} f(x), \lim_{x\to 1^+} f(x)\right)$$

$$= (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$$

Γραφική παράσταση



β) $\left.\begin{array}{l} y + 2x - \alpha = 0 \\ y = \dfrac{x}{x-1} \end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{x}{x-1} + 2x - \alpha = 0 \Rightarrow$

$x + 2x(x-1) - \alpha(x-1) = 0 \Rightarrow$

$x + 2x^2 - 2x - \alpha x + \alpha = 0 \Rightarrow$

$2x^2 - (1+\alpha)x + \alpha = 0$ **(2)**

Για να τέμνει η ευθεία $y + 2x - \alpha = 0$ την καμπύλη $y = \dfrac{x}{x-1}$
σε δύο σημεία θα πρέπει η δευτεροβάθμια εξίσωση (2)
να έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες,
δηλαδή θετική διακρίνουσα.

$\Delta = [-(1+\alpha)]^2 - 4\cdot 2\cdot \alpha = (1+\alpha)^2 - 8\alpha = 1 + 2\alpha + \alpha^2 - 8\alpha = \alpha^2 - 6\alpha + 1$

Πρέπει $\alpha^2 - 6\alpha + 1 > 0$

Το τριώνυμο $\alpha^2 - 6\alpha + 1$ έχει $\Delta' = 32$ και ρίζες

$$\alpha_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{32}}{2} = \frac{6 \pm 4\sqrt{2}}{2} = 3 \pm 2\sqrt{2}$$

α	$-\infty$		$3-2\sqrt{2}$		$3+2\sqrt{2}$		$+\infty$
$\alpha^2 - 6\alpha + 1$		+	0	-	0	+	

Επομένως $\alpha \in (-\infty\ ,\ 3 - 2\sqrt{2}) \cup (3 + 2\sqrt{2}\ ,\ +\infty)$.