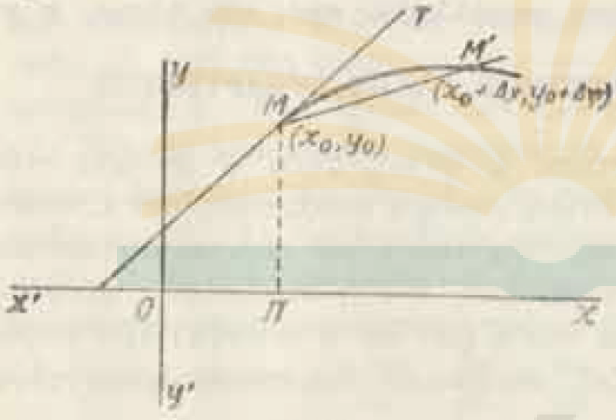
ΓΕΝΙΚΕΣ ΕΙΣΙΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 1969
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΑΛΓΕΒΡΑ
ΓΕΩΠΟΝΟΔΑΣΟΛΟΓΙΚΟΣ ΚΥΚΛΟΣ
Δευτέρα 8 Σεπτεμβρίου 1969

Ζήτημα 1ο

α) **Παράγωγος μιᾶς συναρτήσεως ψ=σ(x) διά τινα τιμὴν τοῦ x καλεῖται τὸ ὅριον, πρὸς τὸ ὁποῖον τείνει ὁ λόγος τῆς αὐξήσεως τῆς συναρτήσεως** πρὸς τὴν ἀντίστοιχον αὔξησιν τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς, ὅταν ἡ αὔξησις αὐτῆς τείνῃ πρὸς τὸ μηδέν.

β) Ἔστω ἤδη τυχοῦσα συνάρτησις ψ=σ(x) συνεχὴς ἔχουσα παράγωγον διὰ τὴν τιμὴν $x=x_0$. Ἔστω δὲ ΜΜ' καμπύλη εἰς ὀρθογωνίους ἄξονας, τὴν ὁποίαν παριστᾷ ἡ δοθεῖσα συνάρτησις ψ=σ(x) (σχ.22).



Σχ. 22.

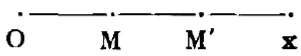
Εἰς τὴν τιμὴν $x=x_0$, τῆς μεταβλητῆς ἀντιστοιχεῖ ἡ τιμὴ ψ_0, τῆς συναρτήσεως, ὁπότε τὸ σημεῖον Μ (x_0,ψ_0) θὰ εἶναι σημεῖον τῆς καμπύλης. Ἐὰν εἰς τὸ x δώσωμεν μίαν αὔξησιν Δx, ἡ συνάρτησις θὰ λάβῃ μίαν αὔξησιν Δψ καὶ τὸ σημεῖον Μ' $(x_0+\Delta x,\psi_0+\Delta\psi)$ θὰ εἶναι σημεῖον τῆς καμπύλης. Ἡ ἐξίσωσις τῆς εὐθείας τῆς διερχομένης διὰ τῶν σημείων Μ καὶ Μ' θὰ εἶναι τῆς μορφῆς ψ=αx+β ἐπαληθευομένη ὑπὸ τῶν συντεταγμένων τῶν σημείων Μ καὶ Μ', ὥστε θὰ ἔχωμεν $\psi_0+\Delta\psi=\alpha(x_0+\Delta x)+\beta$ καὶ $\psi_0=\alpha x_0+\beta$· ἀφαιροῦντες δὲ τὰς ἐξισώσεις κατὰ μέλη ἔχομεν $\Delta\psi=\alpha\,\Delta x$ ἢ $\frac{\Delta\psi}{\Delta x}=\alpha$, ἤτοι ὁ συντελεστὴς κατευθύνσεως τῆς εὐθείας ΜΜ' εἶναι ὁ λόγος $\frac{\Delta\psi}{\Delta x}$. Ἀλλὰ ὅταν ορ$\Delta x=0$, ἐπειδὴ ἡ συνάρτησις εἶναι συνεχής, θὰ εἶναι καὶ ορ$\Delta\psi=0$. Καὶ ἐπειδὴ ὑπετέθη, ὅτι ἔχει παράγωγον, θὰ εἶναι ορ$\frac{\Delta\psi}{\Delta x}=\psi'$, τὸ δὲ σημεῖον Μ' τείνει νὰ συμπέσῃ μετὰ τοῦ Μ, ὁπότε ἡ χορδὴ ΜΜ' θὰ ἔχῃ ὡς ὁρικὴν θέσιν τὴν ἐφαπτομένην ΜΤ τῆς καμπύλης εἰς τὸ σημεῖον Μ (x_0, ψ_0) καὶ τῆς ὁποίας ὁ συντελεστὴς κατευθύνσεως εἶναι τὸ ορ$\frac{\Delta\psi}{\Delta x}$, δηλαδὴ ἡ τιμὴ τῆς παραγώγου τῆς συναρτήσεως διὰ $x=x_0$. Ἄρα:

Ὅταν μία συνάρτησις ψ=σ(x) διὰ τιμὴν $x=x_0$ ἔχῃ παράγωγον, ἡ τιμὴ τῆς παραγώγου διὰ $x=x_0$ ἰσοῦται μὲ τὸν συντελεστὴν κατευθύνσεως τῆς ἐφαπτομένης τῆς καμπύλης, τὴν ὁποίαν ἡ συνάρτησις παριστᾷ, εἰς τὸ σημεῖον αὐτῆς, τὸ ἔχον τετμημένην x_0.

Σημασία τῆς παραγώγου εἰς τὴν φυσικὴν (κινηματική).

Ἔστω ὅτι ἓν κινητὸν M κινεῖται ἐπὶ μιᾶς προσανατολισμένης εὐθείας μὲ ταχύτητα V μεταβαλλομένην

Ἔστω O αὐθαίρετον σημεῖον τῆς εὐθείας αὐτῆς, τὸ ὁποῖον λαμβάνομεν ὡς ἀρχήν. Ἔστωσαν M καὶ M′ αἱ θέσεις τοῦ κινητοῦ εἰς χρόνους t καὶ t + Δt, ὅτε θὰ εἶναι OM = x καὶ OM′ = x + Δx.



Ὁ λόγος $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ καλεῖται μέση ταχύτης τοῦ κινητοῦ εἰς τὸν χρόνον Δt, τὸ δὲ ὅριον τοῦ λόγου αὐτοῦ διὰ $\Delta t \to 0$, καλεῖται **στιγμιαία ταχύτης** τοῦ κινητοῦ εἰς τὴν θέσιν **M(x)** ἢ εἰς τὸν χρόνον t καὶ παρίσταται διὰ τοῦ V. Θὰ ἔχωμεν συνεπῶς :

$$V = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} = \text{παράγωγος τοῦ } x \text{ ὡς πρὸς } t.$$

Ἄρα εἰς τὴν φυσικὴν ἡ παράγωγος τοῦ διαστήματος ὡς πρὸς τὸν χρόνον παριστᾶ τὴν στιγμιαίαν ταχύτητα τοῦ κινητοῦ.

Τὸ αὐτὸ ἰσχύει καὶ ὅταν ἡ τροχιὰ τοῦ σημείου M εἶναι καμπύλη.

Παρατήρησις. Ἡ δευτέρα παράγωγος τοῦ διαστήματος ὡς πρὸς τὸν χρόνον εἶναι ἡ **στιγμιαία ἐπιτάχυνσις** τοῦ κινητοῦ συμβολιζομένη διὰ τοῦ γ.

Ζήτημα 2ο

α) $f(x) = x^2 - x - 6$

$D_f = \mathbb{R}$

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική.

$f'(x) = (x^2 - x - 6)' = 2x - 1$

- Για $x < \frac{1}{2}$ είναι $f'(x) < 0$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$
- Για $x > \frac{1}{2}$ είναι $f'(x) > 0$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$

Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x = \frac{1}{2}$ την τιμή

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} - 6 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 6 = \frac{1}{4} - \frac{2}{4} - \frac{24}{4} = -\frac{25}{4}$$

άρα η παραβολή έχει κορυφή το $K\left(\frac{1}{2}, -\frac{25}{4}\right)$

$f''(x) = (2x - 1)' = 2 > 0$, άρα η f είναι γνησίως κυρτή στο $\mathbb{R}$.

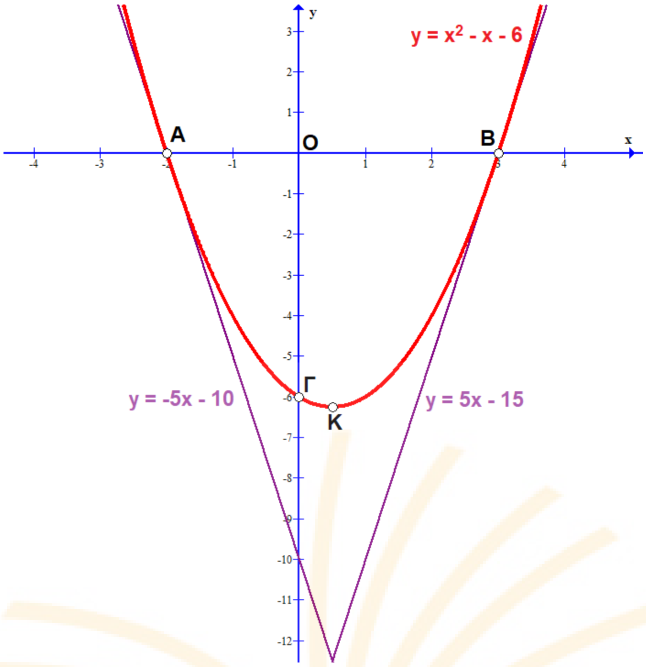
▹ Σημεία τομής με τον άξονα $x'x$:

$y = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow (x - 3)(x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = 3$ ή $x = -2$

άρα η παραβολή τέμνει τον $x'x$ στα $A(-2, 0)$ και $B(3, 0)$.

▹ Σημείο τομής με τον άξονα $y'y$:

$x = 0 \Rightarrow y = -6$, άρα η παραβολή τέμνει τον $y'x$ στο $\Gamma(0, -6)$.



β) Η παραβολή τέμνει τον x΄x στα Α (-2 , 0) και Β (3 , 0).

▷ ε_1: εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο Α (-2 , 0) :

$y - f(-2) = f'(-2)\cdot(x+2) \;\Rightarrow\; y - 0 = -5\cdot(x+2) \;\Rightarrow\; \mathbf{y = -5x - 10}$

▷ ε_2: εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο Β (3 , 0) :

$y - f(3) = f'(3)\cdot(x-3) \;\Rightarrow\; y - 0 = 5\cdot(x-3) \;\Rightarrow\; \mathbf{y = 5x - 15}$

Ζήτημα 3^{o}

$$\sqrt{x^2+x-6} < x+7$$

Πρέπει $x^2+x-6 \geq 0$ και $x+7>0$

• $x^2+x-6 \geq 0$

Το τριώνυμο x^2+x-6 έχει $\Delta = 25$ και ρίζες -3 και 2.

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
x^2+x-6		+	0	-	0	+	

άρα $x \in (-\infty, -3] \cup [2, +\infty)$ **(1)**

• $x+7>0 \;\Leftrightarrow\; x>-7$ **(2)**

Από (1) και (2) έχουμε $x \in (-7, -3] \cup [2, +\infty)$ **(3)**

$$\sqrt{x^2+x-6} < x+7 \;\overset{\text{μέλη μη}}{\underset{\text{αρνητικά}}{\Rightarrow}}\; \left(\sqrt{x^2+x-6}\right)^2 < (x+7)^2 \;\Leftrightarrow$$

$$\cancel{x^2} + x - 6 < \cancel{x^2} + 14x + 49 \;\Leftrightarrow\; x - 14x < 49 + 6 \;\Leftrightarrow$$

$$-13x < 55 \;\Leftrightarrow\; x > -\frac{55}{13} \quad \textbf{(4)}$$

Από (3) και (4) έχουμε τελικά $\mathbf{x \in \left(-\frac{55}{13}, -3\right] \cup [2, +\infty)}$.