ΓΕΝΙΚΕΣ ΕΙΣΙΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 1969

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

(ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΟΣ ΚΥΚΛΟΣ)

Τρίτη 2 Σεπτεμβρίου 1969

Ζήτημα 1^{ο}

Σχολικό βιβλίο Θεωρητική γεωμετρία του Ν.Δ.Νικολάου (εκδ.1965) σελίδες 287-288

§ 326. *Θεώρημα ΙΙ.* **Ἂν δύο τρίεδροι στερεαὶ γωνίαι ἔχωσι μίαν ἕδραν ἴσην καὶ τὰς προσκειμένας διέδρους γωνίας ἴσας, μίαν πρὸς μίαν, αἱ στερεραὶ αὗται γωνίαι εἶναι ἴσαι ἢ ἡ μία ἰσοῦται πρὸς τὴν κατὰ κορυφὴν τῆς ἄλλης, καθ' ὅσον τὰ ἴσα στοιχεῖα αὐτῶν εἶναι ὁμοίως ἢ ἀνομοίως διατεταγμένα.**
Ἔστωσαν πχ. αἱ τρίεδροι στερεαὶ γωνίαι Κ. ΑΒΓ καὶ Λ. ΔΕΖ (σχ. 246) ἔχουσαι $\widehat{AK\Gamma} = \widehat{\Delta\Lambda Z}$, δίεδ. ΚΑ = δίεδ. ΛΔ καὶ δίεδ. ΚΓ = δίεδ. ΛΖ καὶ ὅτι τὰ στοιχεῖα ταῦτα εἶναι ὁμοίως διατεταγμένα εἰς τὰς δύο τριέδρους. Εἶναι δὲ αὗται ἴσαι, ὡς ἀκολούθως βεβαιούμεθα.

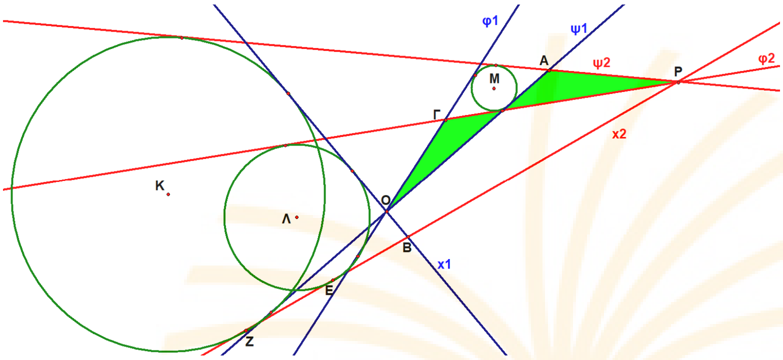
Ἀπόδειξις. Νοοῦμεν τὴν Λ. ΔΕΖ τεθειμένην ἐπὶ τῆς Κ. ΑΒΓ, οὕτως, ὥστε ἡ ἕδρα ΔΛΖ νὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ΑΚΓ μὲ τὴν ΛΔ ἐπὶ τῆς ΚΑ. Τότε ἡ ἕδρα ΔΛΕ φέρεται πρὸς τὸ αὐτὸ μὲ τὴν ΑΚΒ μέρος, ὡς πρὸς τὴν ΑΚΓ ἕνεκα τῆς ὁμοίας διατάξεως τῶν ἴσων στοιχείων. Τὰ δὲ ἐπίπεδα ΔΛΕ, ΖΛΕ ἐφαρμόζουσιν ἀντιστοίχως ἐπὶ τῶν ΑΚΒ, ΓΚΒ ἕνεκα τῆς ἰσότητος τῶν διέδρων ΚΑ, ΚΓ πρὸς τὰς ΛΔ, ΛΖ ἀντιστοίχως. Καὶ αἱ τομαὶ δὲ ΚΒ, ΛΕ αὐτῶν θὰ ἀφαρμόσωσιν. Ἑπομένως ἡ Λ. ΔΕΖ ἐφαρμόζει ἐπὶ τῆς Κ. ΑΒΓ, ἤτοι αὗται εἶναι ἴσαι.

Ἂν δὲ τὰ ἴσα στοιχεῖα εἶναι ἀνομοίως διατεταγμένα, κατ' ἀνάλογον πρὸς τὸν ἀνωτέρω τρόπον βεβαιούμεθα ὅτι ἡ Λ. ΔΕΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν Κ. Α΄Β΄Γ΄ κατὰ κορυφὴν τῆς Κ. ΑΒΓ.

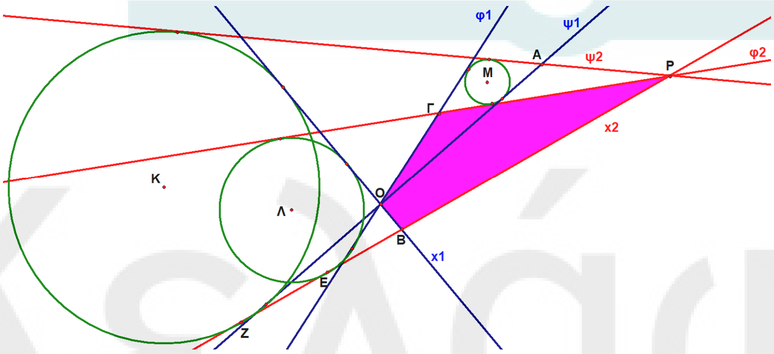
Παρατήρησις. Εὐκόλως δὲ ἐννοοῦμεν ὅτι δίεδ. ΚΒ = δίεδ. ΛΕ, $\widehat{AKB} = \widehat{\Delta\Lambda E}$, $\widehat{BK\Gamma} = \widehat{E\Lambda Z}$ κ.τ.λ. ὡς ἀνωτέρω.

Ζήτημα 2ο

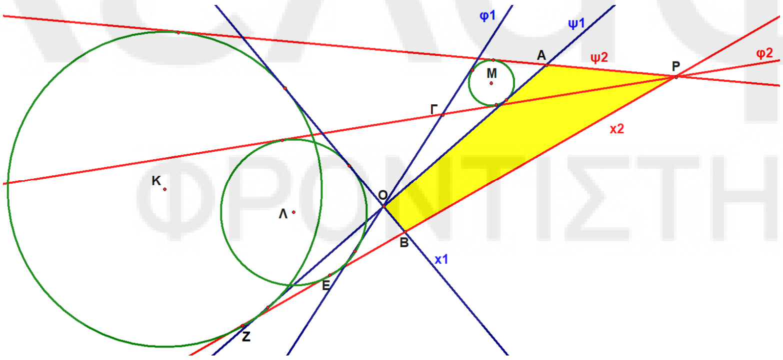
Έστω ότι οι x_1, $ψ_1$ και $φ_1$ διέρχονται από το σημείο Ο.
Έστω επίσης ότι οι $ψ_2$, $φ_2$ διέρχονται από το σημείο Ρ.
Θα δείξουμε ότι και η x_2 διέρχεται από το σημείο Ρ.
Φέρνουμε ΡΕ εφαπτομένη του κύκλου Λ.
Θα δείξουμε ότι η ΡΕ εφάπτεται και στον κύκλο Κ.
Αν Α το σημείο τομής των $ψ_1$, $ψ_2$, Β το σημείο τομής των ΡΕ, x_2 και Γ το σημείο τομής των $φ_1$, $φ_2$, τότε :



Το μη κυρτό τετράπλευρο ΡΑΟΓ είναι παρεγγεγραμμένο στον κύκλο Μ,
άρα ΟΑ + ΑΡ = ΟΓ + ΓΡ (1)



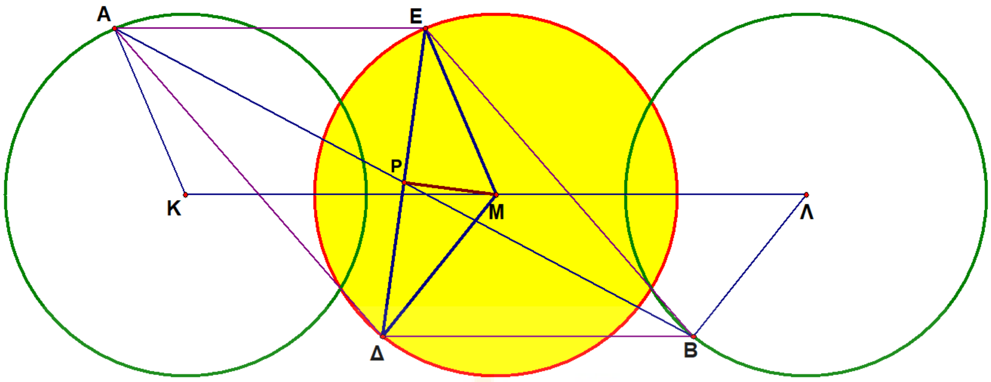
Το ΓΡΟΒ είναι παρεγγεγραμμένο στον κύκλο Λ, άρα ΟΓ + ΓΡ = ΟΒ + ΒΡ (2)



Από (1) και (2) έχουμε ΟΑ + ΑΡ = ΟΒ + ΒΡ,
άρα το ΒΟΑΡ είναι παρεγγράψιμο στον κύκλο Κ,
δηλαδή η ΡΕ είναι εφαπτομένη του κύκλου Κ.

Επομένως οι x_2, $ψ_2$ και $φ_2$ επίσης διέρχονται από το ίδιο σημείο.

Ζήτημα 3^o



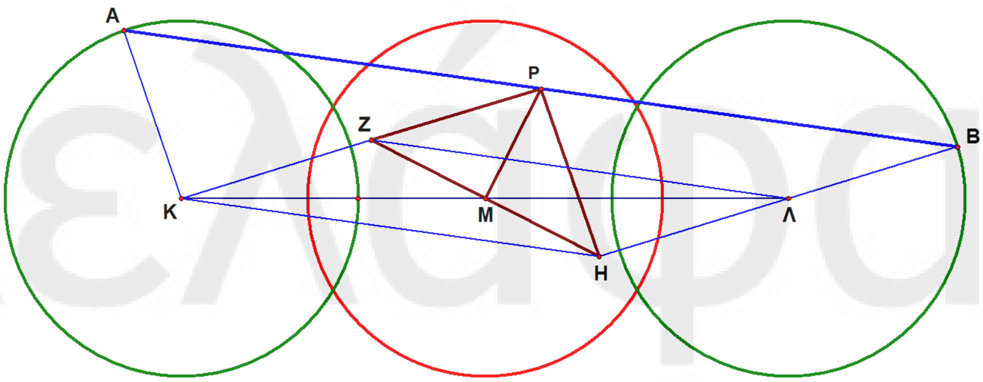
Έστω Μ το μέσο του ΚΛ.

Φέρνουμε ΜΔ $\overset{//}{=}$ ΛΒ, ΜΕ $\overset{//}{=}$ ΚΑ, ώστε ΒΛΜΔ, ΑΕΜΚ παραλληλόγραμμα.

Είναι ΑΕ $\overset{//}{=}$ ΚΜ = ΜΛ $\overset{//}{=}$ ΔΒ, άρα το ΑΕΒΔ είναι παραλληλόγραμμο
και οι διαγώνιοί του διχοτομούνται στο Ρ (μέσο του ΑΒ).

Το $\overset{\Delta}{\text{ΜΕΔ}}$ είναι ισοσκελές αφού ΜΔ = ΜΕ = R και το ΜΡ είναι διάμεσος
άρα το ΜΡ είναι και ύψος, δηλαδή ΜΡ $\perp$ ΕΔ.

Στο ορθογώνιο $\overset{\Delta}{\text{ΡΜΕ}}$ η ΡΜ είναι κάθετος, άρα $0 \leq$ ΜΡ $\leq$ R,
δηλαδή το σημείο Ρ ανήκει στον κυκλικό δίσκο με κέντρο Μ και ακτίνα R.



Αντίστροφα έστω Ρ τυχαίο σημείο του κυκλικού δίσκου (Μ , R).
Στην ευθεία που διέρχεται από το Μ και είναι κάθετη στο ΡΜ
παίρνουμε σημεία Ζ, Η τέτοια ώστε ΡΖ = ΡΗ = R.
Στους κύκλους (Κ , R) και (Λ , R) παίρνουμε σημεία Α και Β αντίστοιχα,

ώστε ΚΑ $\overset{//}{=}$ ΡΗ και ΛΒ $\overset{//}{=}$ ΡΖ, με ΑΡΗΚ, ΖΡΒΛ παραλληλόγραμμα.
Το ΚΗΛΖ είναι παραλληλόγραμμο (οι διαγώνιοί του διχοτομούνται στο Μ).

Είναι ΑΡ $\overset{//}{=}$ ΚΗ $\overset{//}{=}$ ΖΛ $\overset{//}{=}$ ΡΒ, άρα Α, Ρ, Β συνευθειακά και ΡΑ = ΡΒ.

https://www.youtube.com/watch?v=cCKPVyDqsvo