

ΓΕΝΙΚΕΣ ΕΙΣΙΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 1969
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΕ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ
ΦΥΣΙΚΟΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ ΚΥΚΛΟΣ
Τετάρτη 17 Σεπτεμβρίου 1969

Ζήτημα 1^ο

Σχολικό βιβλίο Θεωρητική γεωμετρία του Ν.Δ. Νικολάου (εκδ.1965) σελίδες 318-319

§ 352 Πρόβλημα. Νά εύρεθῇ ὁ ὄγκος κολ. πυραμίδος ἐκ τῶν βάσεων καὶ τοῦ ὕψους αὐτῆς.

Λύσις. Ἐστω Θ ὁ ὄγκος τῆς ἀνωτέρω κολ. πολυγωνικῆς πυραμίδος BH , $(\lambda\lambda) = \nu$ τὸ ὕψος αὐτῆς καὶ $(AB\Gamma\Delta) = B$, $(EZ\Theta H) = \beta$ τὰ ἐμβαδὰ τῶν βάσεων αὐτῆς (σχ. 272). Εἶναι φανερόν ὅτι:

$$\Theta = (K.AB\Gamma\Delta) - (K.EZ\Theta H). \quad (1)$$

Ἐπειδὴ δὲ $(K.AB\Gamma\Delta) = \frac{1}{3} B \cdot (K\lambda)$ καὶ $(K.EZ\Theta H) = \frac{1}{3} \beta \cdot (K\lambda)$,
 ἢ (1) γίνεται $\Theta = \frac{1}{3} [B(K\lambda) - \beta(K\lambda)] \quad (2)$

Ἐπειδὴ δὲ (§ 346) εἶναι $\frac{B}{\beta} = \left(\frac{K\lambda}{\lambda\lambda}\right)^2$, ἔπεται κατὰ σειρὰν ὅτι

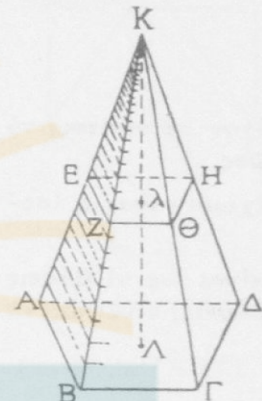
$$\frac{(K\lambda)}{(\lambda\lambda)} = \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{\beta}}, \quad \frac{(K\lambda)}{\sqrt{B}} = \frac{(\lambda\lambda)}{\sqrt{\beta}} = \frac{(K\lambda) - (\lambda\lambda)}{\sqrt{B} - \sqrt{\beta}} = \frac{\nu}{\sqrt{B} - \sqrt{\beta}}.$$

Ἐπομένως $(K\lambda) = \frac{\nu \cdot \sqrt{B}}{\sqrt{B} - \sqrt{\beta}}$ καὶ $(\lambda\lambda) = \frac{\nu \cdot \sqrt{\beta}}{\sqrt{B} - \sqrt{\beta}}.$

Ἔνεκα τούτων ἡ (2) γίνεται $\Theta = \frac{1}{3} \frac{B\sqrt{B} - \beta\sqrt{\beta}}{\sqrt{B} - \sqrt{\beta}} \cdot \nu.$

Ἄν δὲ ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν $(B\sqrt{B} - \beta\sqrt{\beta}) : (\sqrt{B} - \sqrt{\beta})$,
 εὐρίσκομεν πηλίκον $B + \sqrt{B\beta} + \beta$ καὶ ἔπομένως

$$\Theta = \frac{1}{3} (B + \sqrt{B\beta} + \beta) \nu.$$



Σχ. 272

Ζήτημα 2^ο

Ἐστω ὅτι R ἡ ἀκτὴν τοῦ κύκλου K ,
 R_1 ἡ ἀκτὴν τοῦ κύκλου K_1 καὶ
 A τὸ σημεῖο τομῆς τοῦ ριζικοῦ ἄξονα ϵ
 με τὴ διακεντρικὴ ευθεῖα KK_1 (σχ.1).

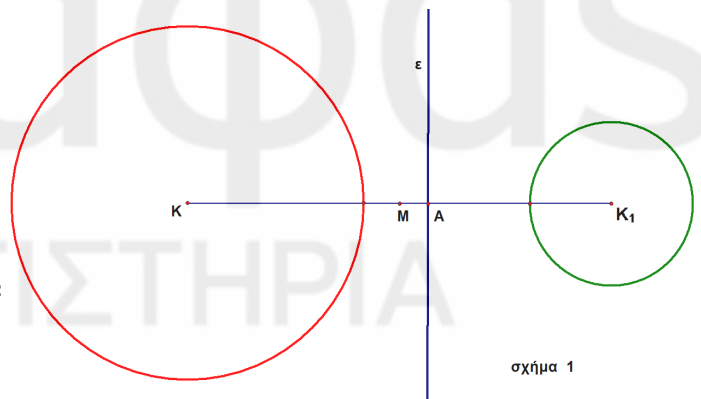
Ἄν M εἶναι τὸ μέσο τοῦ KK_1 , τότε :

$$\begin{aligned} AK^2 - R^2 &= AK_1^2 - R_1^2 \Leftrightarrow AK^2 - AK_1^2 = \\ &= (AK - AK_1) \cdot (AK + AK_1) = R^2 - R_1^2 \Leftrightarrow \\ &[KM + AM - (K_1M - AM)] \cdot KK_1 = R^2 - R_1^2 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$2AM \cdot KK_1 = R^2 - R_1^2 \Leftrightarrow AM = \frac{R^2 - R_1^2}{2 \cdot KK_1}$$

$$KP = MK + AM = \frac{KK_1}{2} + \frac{R^2 - R_1^2}{2 \cdot KK_1} = \frac{KK_1^2 + R^2 - R_1^2}{2 \cdot KK_1}$$

Ἄν $KK_1 = x$, τότε $KP = \frac{x^2 + R^2 - R_1^2}{2x}$



σχήμα 1

Θεωρούμε τη συνάρτηση f , με $f(x) = \frac{x^2 + R^2 - R_1^2}{2x}$, $x > 0$

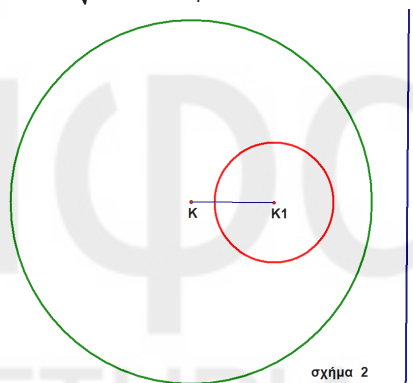
$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{x^2 + R^2 - R_1^2}{2x} \right)' = \frac{(x^2 + R^2 - R_1^2)' \cdot 2x - (x^2 + R^2 - R_1^2) \cdot (2x)'}{(2x)^2} \\ &= \frac{2x \cdot 2x - (x^2 + R^2 - R_1^2) \cdot 2}{4x^2} = \frac{4x^2 - 2x^2 + 2R^2 - 2R_1^2}{4x^2} \\ &= \frac{2x^2 + 2R^2 - 2R_1^2}{4x^2} = \frac{x^2 + R^2 - R_1^2}{2x^2} = \frac{(x + \sqrt{R^2 - R_1^2})(x - \sqrt{R^2 - R_1^2})}{2x^2} \end{aligned}$$

- Για $0 < x < \sqrt{R^2 - R_1^2}$ είναι $f'(x) < 0$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα
- Για $x > \sqrt{R^2 - R_1^2}$ είναι $f'(x) > 0$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα
- Για $x = \sqrt{R^2 - R_1^2}$ η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο.

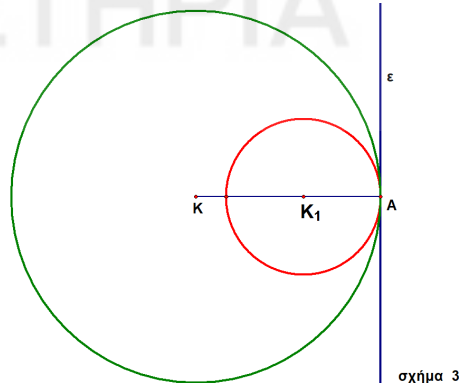
Αναλυτικότερα :

- ▷ Αν $KK_1 < \sqrt{R^2 - R_1^2}$ η απόσταση AK είναι γνησίως φθίνουσα
ενώ αν $KK_1 > \sqrt{R^2 - R_1^2}$ η απόσταση AK είναι γνησίως αύξουσα.
Η απόσταση AK γίνεται ελάχιστη όταν $AK = \sqrt{R^2 - R_1^2}$.

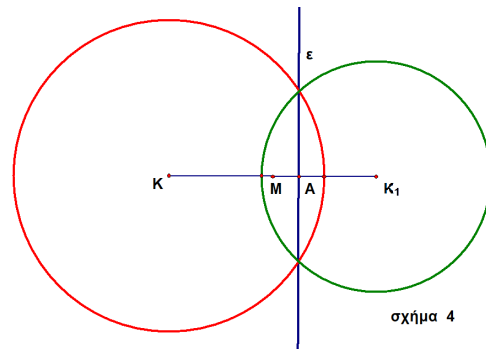
- ▷ • Αν $0 \leq KK_1 < R - R_1$
Ο κύκλος K_1 είναι εσωτερικός
του κύκλου K και ο ριζικός άξονας
βρίσκεται εκτός των κύκλων
(σχήμα 2)



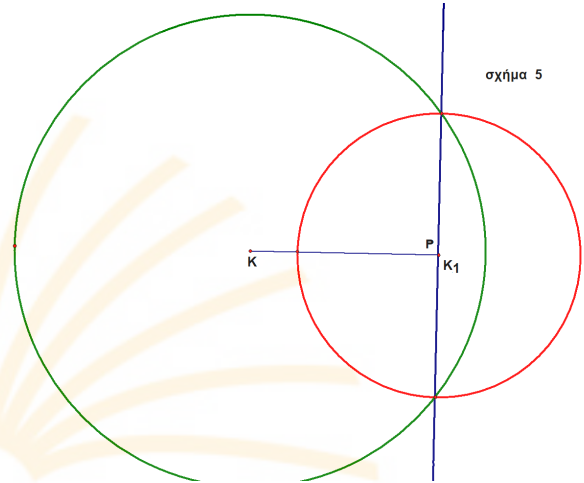
- Αν $KK_1 = R - R_1$
Οι κύκλοι K και K_1
εφάπτονται εσωσυνεκτικά
και ο ριζικός άξονας είναι η κοινή
εξωτερική εφαπτομένη τους
(σχήμα 3)



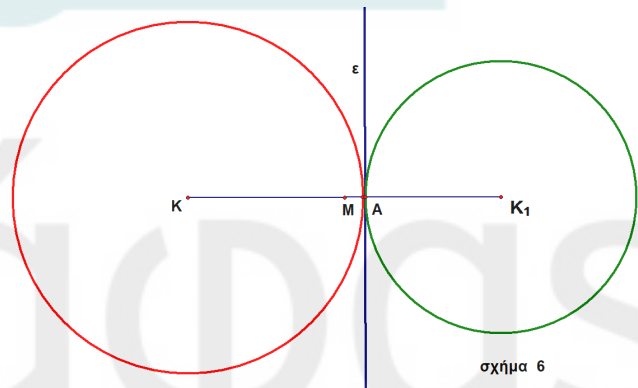
- Αν $R - R_1 < KK_1 < R + R_1$
Οι κύκλοι K, K_1 τέμνονται
σε δύο σημεία και ο ριζικός άξονας
διέρχεται από τα σημεία τομής τους.
(σχήμα 4)



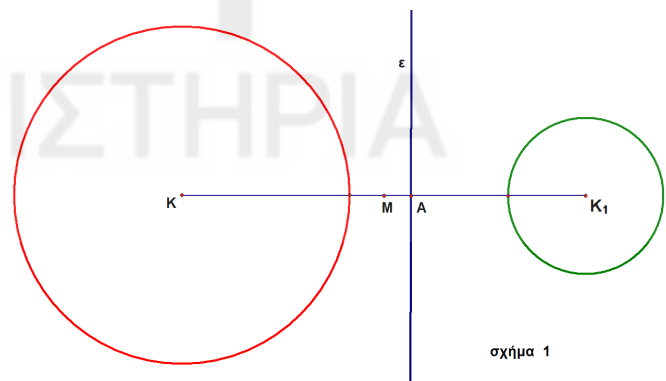
Ειδικότερα αν $KK_1 = \sqrt{R^2 - R_1^2}$
δηλαδή όταν $K_1 \equiv A$
η κοινή χορδή τους είναι και
διάμετρος του κύκλου K_1 και
η απόσταση AK γίνεται ελάχιστη.
(σχήμα 5)



- Αν $KK_1 = R + R_1$
Οι κύκλοι K και K_1
εφάπτονται εξωτερικά
και ο ριζικός άξονας είναι η κοινή
εσωτερική εφαπτομένη τους.
(σχήμα 6)



- Αν $KK_1 > R + R_1$
Οι κύκλοι K, K_1 δεν τέμνονται,
βρίσκονται ο ένας εκτός του άλλου
και ο ριζικός άξονας βρίσκεται
ανάμεσά τους.
(σχήμα 1)



Ζήτημα 3^ο

- Αν $\hat{A} + \hat{B} < 180^0$

και ότι οι μη παράλληλες πλευρές
ΒΓ και ΑΔ του τραπεζίου
τέμνονται στο σημείο Ζ. (σχήμα 1)

Έστω λ^2 το εμβαδόν του τριγώνου $\triangle ZAB$.

▷ Αν $\lambda^2 \leq \kappa^2$, τότε
το πρόβλημα δεν έχει λύση

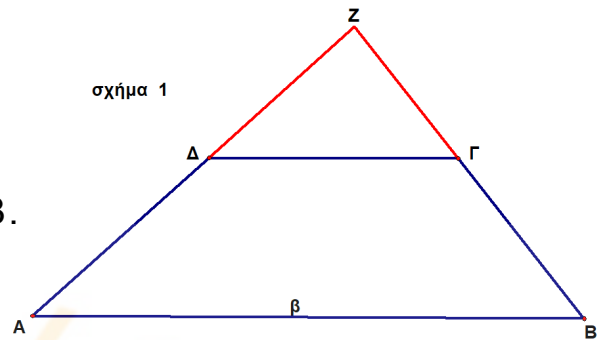
▷ Αν $\lambda^2 > \kappa^2$, τότε $\triangle Z\Delta\Gamma \approx \triangle ZAB$ και

$$\frac{E_{\triangle Z\Delta\Gamma}}{E_{\triangle ZAB}} = \left(\frac{\Delta\Gamma}{AB}\right)^2 \Rightarrow \frac{E_{\triangle ZAB} - E_{AB\Gamma\Delta}}{\lambda^2} = \frac{\Delta\Gamma^2}{AB^2} \Rightarrow$$

$$\frac{\lambda^2 - \kappa^2}{\lambda^2} = \frac{\Delta\Gamma^2}{\beta^2} \Rightarrow \Delta\Gamma^2 = \frac{\lambda^2 - \kappa^2}{\lambda^2} \cdot \beta^2 \Rightarrow \Delta\Gamma = \frac{\sqrt{\lambda^2 - \kappa^2}}{\lambda} \cdot \beta$$

άρα το τμήμα ΔΓ είναι κατασκευάσιμο,

άρα το τραπέζιο ΑΒΓΔ είναι κατασκευάσιμο.



- Αν $\hat{A} + \hat{B} > 180^0$

και ότι οι μη παράλληλες πλευρές
ΒΓ και ΑΔ του τραπεζίου
τέμνονται στο σημείο Ζ. (σχήμα 2)

Έστω λ^2 το εμβαδόν του τριγώνου $\triangle ZAB$.

Είναι $\triangle Z\Delta\Gamma \approx \triangle ZAB$ και

$$\frac{E_{\triangle Z\Delta\Gamma}}{E_{\triangle ZAB}} = \left(\frac{\Delta\Gamma}{AB}\right)^2 \Rightarrow \frac{E_{\triangle ZAB} + E_{AB\Gamma\Delta}}{\lambda^2} = \frac{\Delta\Gamma^2}{AB^2} \Rightarrow$$

$$\frac{\lambda^2 + \kappa^2}{\lambda^2} = \frac{\Delta\Gamma^2}{\beta^2} \Rightarrow \Delta\Gamma^2 = \frac{\lambda^2 + \kappa^2}{\lambda^2} \cdot \beta^2 \Rightarrow \Delta\Gamma = \frac{\sqrt{\lambda^2 + \kappa^2}}{\lambda} \cdot \beta$$

άρα το τμήμα ΔΓ είναι κατασκευάσιμο,

άρα το τραπέζιο ΑΒΓΔ είναι κατασκευάσιμο.

