ΓΕΝΙΚΕΣ ΕΙΣΙΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 1969

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΕ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΓΕΩΠΟΝΟΔΑΣΟΛΟΓΙΚΟΣ ΚΥΚΛΟΣ

Δευτέρα 15 Σεπτεμβρίου 1969

Ζήτημα 1ο
Σχολικό βιβλίο Θεωρητική γεωμετρία του Ν.Δ.Νικολάου (εκδ.1965) σελίδες 370-371

§ 412. *Πρόβλημα.* **Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν σφαιρικῆς ζώνης.**

Λύσις. Ἔστω ΑΖΒ τὸ τόξον, τὸ ὁποῖον γράφει τὴν σφαιρικὴν ζώνην, καὶ Ζ τὸ ἐμβαδὸν αὐτῆς. Ἔστω δὲ ΑΕΖΗΒ κανονικὴ τεθλ. γραμμὴ ἐγγεγραμμένη εἰς τὸ τόξον καὶ Γ,Θ,Ι,Κ,Δ αἱ προβολαὶ τῶν κορυφῶν αὐτῆς ἐπὶ τὴν διάμετρον ΠΠ′ τῆς ἡμιπεριφερείας, εἰς τὴν ὁποίαν ἀνήκει τὸ τόξον ΑΖΒ.

Κατὰ τὴν στροφὴν τοῦ ἡμικυκλίου περὶ τὴν ΠΠ′ ἑκάστη πλευρὰ τῆς τεθλ. γραμμῆς γράφει κυρτὴν ἐπιφάνειαν κολούρου κώνου.

Διὰ νὰ ὑπολογίσωμεν δὲ τὸ ἐμβαδὸν ἑκάστης τοιαύτης ἐπιφανείας παρατηροῦμεν ὅτι αἱ κάθετοι εἰς τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ΑΕ, ΕΖ κ.τ.λ. διέρχονται ἀπὸ τὸ κέντρον Σ καὶ ὅτι τοῦτο ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τὰς πλευρὰς ταύτας.

Ἂν δὲ ἐφαρμόσωμεν τὸν γνωστὸν τύπον (§ 391 β′), εὑρίσκομεν ὅτι:

$$(\text{ἐπιφ. } AE) = 2\pi(\Sigma\Lambda)(\Gamma\Theta)\cdot(\text{ἐπιφ. } ZE) = 2\pi(\Sigma\Lambda)\cdot(\Theta I),$$
$$(\text{ἐπιφ. } ZH) = 2\pi(\Sigma\Lambda)\cdot(IK),\ (\text{ἐπιφ. } HB) = 2\pi(\Sigma\Lambda)\cdot(K\Delta).$$

Ἐκ τούτων διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη εὑρίσκομεν ὅτι:

$$(\text{ἐπιφ. } AEZHB) = 2\pi(\Sigma\Lambda)\cdot(\Gamma\Delta).$$

Αὕτη ἀληθεύει ὁσασδήποτε πλευρὰς καὶ ἂν ἔχῃ ἡ τεθλασμένη γραμμή. Θὰ εἶναι ἑπομένως:

$$\text{ὅρ}(\text{ἐπιφ. } AEZHB) = 2\pi(\Gamma\Delta)\ \text{ὅρ}(\Sigma\Lambda).$$

Ἐπειδὴ δὲ ὅρ (ἐπιφ. ΑΕΖΗΒ) = Ζ καὶ ὅρ (ΣΛ) = R, ἕπεται ὅτι:

$$\mathbf{Z = 2\pi R\,(\Gamma\Delta)} \quad (1)$$

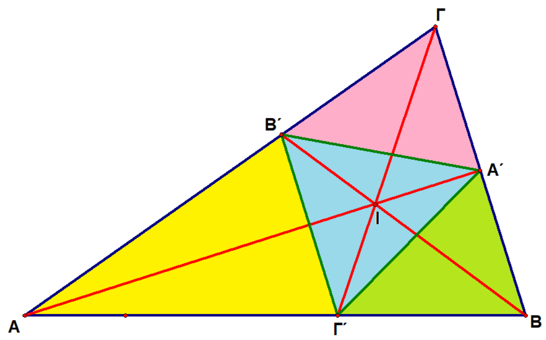
Ἤτοι:

Τὸ ἐμβαδὸν σφαιρικῆς ζώνης εἶναι γινόμενον τοῦ ὕψους αὐτῆς ἐπὶ τὴν περιφέρειαν μεγίστου κύκλου τῆς σφαίρας, εἰς τὴν ὁποίαν εὑρίσκεται ἡ ζώνη αὐτή.

Ζήτημα 2ο

$$E_{A'B'\Gamma'} = E_{AB\Gamma} - E_{AB'\Gamma'} - E_{A'B\Gamma'} - E_{A'B'\Gamma} \Rightarrow$$

$$\frac{E_{A'B'\Gamma'}}{E_{AB\Gamma}} = 1 - \frac{E_{AB'\Gamma'}}{E_{AB\Gamma}} - \frac{E_{A'B\Gamma'}}{E_{AB\Gamma}} - \frac{E_{A'B'\Gamma}}{E_{AB\Gamma}} \quad (1)$$



- $\tau = \dfrac{\alpha + \beta + \gamma}{2} = \dfrac{3 + 5 + 6}{2} = 7$

$$E_{AB\Gamma} = \sqrt{\tau\cdot(\tau - \alpha)\cdot(\tau - \beta)\cdot(\tau - \gamma)} = \sqrt{7\cdot 4\cdot 2\cdot 1} = \sqrt{56} = 2\cdot\sqrt{14} \quad (2)$$

- Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $AB'\Gamma'$ έχουν $\hat{A}$ κοινή, άρα

$$\frac{E_{AB'\Gamma'}}{E_{AB\Gamma}} = \frac{AB'\cdot A\Gamma'}{\beta\cdot\gamma} = \frac{\frac{\beta\cdot\gamma}{\alpha+\gamma}\cdot\frac{\beta\cdot\gamma}{\alpha+\beta}}{\beta\cdot\gamma} = \frac{\beta\cdot\gamma}{(\alpha+\beta)\cdot(\alpha+\gamma)} = \frac{5\cdot 6}{9\cdot 8} = \frac{5}{12} \quad (3)$$

- Όμοια $\dfrac{E_{A'B\Gamma'}}{E_{AB\Gamma}} = \dfrac{\alpha\cdot\gamma}{(\alpha+\beta)\cdot(\beta+\gamma)} = \dfrac{3\cdot 6}{8\cdot 11} = \dfrac{9}{44} \quad (4)$

- και $\dfrac{E_{A'B'\Gamma}}{E_{AB\Gamma}} = \dfrac{\alpha\cdot\beta}{(\alpha+\gamma)\cdot(\beta+\gamma)} = \dfrac{3\cdot 5}{9\cdot 11} = \dfrac{5}{33} \quad (5)$

$$(1) \overset{(2),\,(3)}{\underset{(4),\,(5)}{\Rightarrow}} \frac{E_{A'B'\Gamma'}}{2\sqrt{14}} = 1 - \frac{5}{12} - \frac{9}{44} - \frac{5}{33} \Rightarrow \frac{E_{A'B'\Gamma'}}{2\sqrt{14}} = \frac{5}{22} \Rightarrow \boxed{\mathbf{E_{A'B'\Gamma'} = \frac{5}{11}\sqrt{14}}}$$

Ζήτημα 3ο

Έστω Δ το ίχνος του ύψους και

M το μέσο του $B\Gamma$.

$\Delta M = \kappa$ (γνωστό)

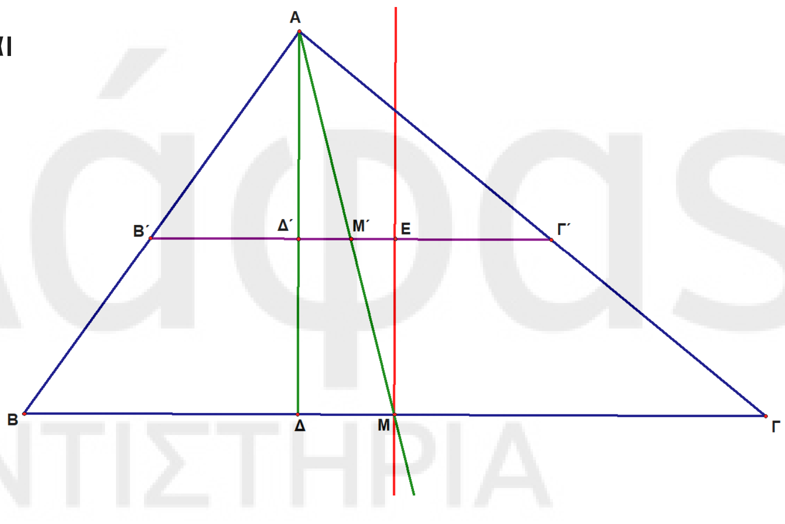
Προφανώς γνωρίζουμε και την

τρίτη γωνία του τριγώνου $AB\Gamma$.

Κατασκευάζουμε $\overset{\Delta}{AB'\Gamma'} \approx \overset{\Delta}{AB\Gamma}$

με $\hat{B}' = \hat{B}$ και $\hat{\Gamma}' = \hat{\Gamma}$.

Φέρνουμε $A\Delta'$ το ύψος και



AM' τη διάμεσο του $\overset{\Delta}{AB'\Gamma'}$.

Στην ημιευθεία $\Delta'\Gamma'$ παίρνουμε σημείο E, τέτοιο ώστε $\Delta'E = \kappa$.

Από το E φέρνω κάθετη στη $B'\Gamma'$ η οποία τέμνει την ημιευθεία AM' στο M.

Από το M φέρνω παράλληλη στη $B'\Gamma'$ η οποία τέμνει τις ημιευθείες

AB' και $A\Gamma'$ στα B και Γ αντίστοιχα.

Το $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ είναι το ζητούμενο τρίγωνο, αφού $A\Delta$ είναι το ύψος του,

AM είναι η διάμεσός του και $\Delta M = \Delta'E = \kappa$.