ΓΕΝΙΚΕΣ ΕΙΣΙΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 1969

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΟΣ ΚΥΚΛΟΣ

Παρασκευή 5 Σεπτεμβρίου 1969

Ζήτημα 1ο

3.4.1. Λύσις τῆς $\alpha\,\eta\mu\chi + \beta\sigma\upsilon\nu\chi = \gamma$, $\alpha\beta\gamma \neq 0$. Ἐπειδὴ $\frac{\beta}{\alpha} \in R$, συνάγεται, ὅτι ὑπάρχει πάντοτε τόξον (εὑρισκόμενον ἐκ τῶν πινάκων), τοῦ ὁποίου ἡ ἐφαπτομένη ἰσοῦται μὲ τὸν ἀριθμὸν $\frac{\beta}{\alpha}$.
Ὡς ἐκ τούτου, πρὸς λύσιν τῆς ἐξισώσεως χρησιμοποιοῦμεν τὸν μετασχηματισμὸν **$\varepsilon\varphi\omega = \frac{\beta}{\alpha}$ (M_1)**, ὅπου ω εἶναι γνωστὸν τόξον καὶ συνεπῶς ἡ ἐξίσωσις γράφεται:

$$\alpha\eta\mu\chi + \beta\sigma\upsilon\nu\chi = \gamma \iff \eta\mu\chi + \frac{\beta}{\alpha}\sigma\upsilon\nu\chi = \frac{\gamma}{\alpha} \iff \eta\mu\chi + \varepsilon\varphi\omega\sigma\upsilon\nu\chi = \frac{\gamma}{\alpha} \iff$$

$$\eta\mu\chi\ \sigma\upsilon\nu\omega + \eta\mu\omega\sigma\upsilon\nu\chi = \frac{\gamma}{\alpha}\ \sigma\upsilon\nu\omega \iff \eta\mu(\chi+\omega) = \frac{\gamma}{\alpha}\ \sigma\upsilon\nu\omega \quad (E).$$

Ἡ τελευταία ὅμως ἐξίσωσις (Ε) εἶναι ἡ γνωστὴ θεμελιώδης ἐξίσωσις **2.1.**, τὴν ὁποίαν ἐπιλύομεν κατὰ τὰ γνωστά, ἤτοι: Ἐὰν $\left|\frac{\gamma}{\alpha}\sigma\upsilon\nu\omega\right| > 1$, δὲν ὑπάρχει οὐδὲν τόξον, τοῦ ὁποίου τὸ συνημίτονον νὰ εἶναι $\frac{\gamma}{\alpha}$ συνω καὶ συνεπῶς ἡ ἐξίσωσις $\alpha\eta\mu\chi + \beta\sigma\upsilon\nu\chi = \gamma$ εἶναι ἀδύνατος. **Ἡ συνθήκη δυνατότητος λύσεως τῆς (Ε)** εἶναι $\left|\frac{\gamma}{\alpha}\sigma\upsilon\nu\omega\right| \leq 1$, ἡ ὁποία περαιτέρω ἀναλύεται ἰσοδυνάμως ὡς ἑξῆς:

$$\left|\frac{\gamma}{\alpha}\sigma\upsilon\nu\omega\right| \leq 1 \iff \frac{\gamma^2}{\alpha^2}\sigma\upsilon\nu^2\omega \leq 1 \iff \frac{\gamma^2}{\alpha^2}\,\frac{1}{1+\varepsilon\varphi^2\omega} \leq 1 \iff$$

$$\frac{\gamma^2}{\alpha^2}\,\frac{1}{1+\frac{\beta^2}{\alpha^2}} \leq 1 \iff \alpha^2+\beta^2 \geqq \gamma^2 \quad (\Sigma).$$

Ἄρα, ἡ γραμμικὴ ἐξίσωσις ἔχει λύσιν, ἐὰν καὶ μόνον ἐάν, πληροῦται ἡ συνθήκη (Σ). Πληρουμένης τῆς (Σ), θέτομεν **$\frac{\gamma}{\alpha}\sigma\upsilon\nu\omega = \eta\mu\theta$ (M_2)**, ὅπου θ γνωστὸν τόξον μὲ $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ καὶ ἡ (Ε) γράφεται:

$$\eta\mu(\chi+\omega) = \eta\mu\theta \iff \begin{cases} \chi+\omega = 2\kappa\pi+\theta \\ \chi+\omega = (2\rho+1)\pi-\theta \end{cases} \iff \begin{cases} \chi = 2\kappa+\theta-\omega \\ \chi = (2\rho+1)\pi-\theta-\omega \end{cases} \quad (\kappa,\rho \in Z)$$

Αἱ δύο τελευταῖαι **οἰκογένειαι** τόξων ἀποτελοῦν τὴν γενικὴν λύσιν τῆς γραμμικῆς ἐξισώσεως.

Ἡ ἀνωτέρω γραμμικὴ τριγωνομετρικὴ ἐξίσωσις εἶναι δυνατὸν νὰ ἐπιλυθῇ καὶ δι' ἄλλης μεθόδου, τὴν ὁποίαν περιγράφομεν κατωτέρω.

3.4.2. Λύσις τῆς $\alpha\,\eta\mu\chi + \beta\sigma\upsilon\nu\chi = \gamma$, $\alpha\beta\gamma \neq 0$. Ἐκφράζομεν, μέσω γνωστῶν τύπων, τὰ ημχ καὶ συνχ συναρτήσει τῆς εφ $\frac{\chi}{2}$ (οἱ τύποι οὗτοι ἰσχύουν μὲ $\chi \neq 2\kappa\pi+\pi$, $\kappa \in Z$) καὶ ἡ ἐξίσωσις γράφεται:

$$\alpha\frac{2\varepsilon\varphi\frac{\chi}{2}}{1+\varepsilon\varphi^2\frac{\chi}{2}}+\beta\frac{1-\varepsilon\varphi^2\frac{\chi}{2}}{1+\varepsilon\varphi^2\frac{\chi}{2}}=\gamma \Longleftrightarrow (\beta+\gamma)\,\varepsilon\varphi^2\frac{\chi}{2}-2\alpha\varepsilon\varphi\frac{\chi}{2}+\gamma-\beta=0 \quad (1)$$

Ἐπίσης, παρατηροῦμεν, ὅτι διὰ $\chi = 2\kappa\pi+\pi$ ἡ γραμμικὴ ἐξίσωσις γράφεται:

$$\alpha\eta\mu(2\kappa\pi+\pi)+\beta\sigma\upsilon\nu(2\kappa\pi+\pi)=\gamma \Longleftrightarrow \alpha\cdot 0+\beta(-1)=\gamma \Longleftrightarrow \beta+\gamma=0$$

Ἄρα, ἡ γραμμικὴ ἐξίσωσις δὲν δέχεται ὡς λύσεις τὰ τόξα:

$$\chi = 2\kappa\pi+\pi \ (\kappa\in Z), \text{ ἐφ' ὅσον } \beta+\gamma\neq 0.$$

Βάσει τῶν ἀνωτέρω διακρίνομεν τὰς ἀκολούθους περιπτώσεις:

1) Ἐὰν $\beta+\gamma\neq 0$, τότε ἡ πρὸς λύσιν ἐξίσωσις εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὴν (1), ἡ ὁποία εἶναι ἀλγεβρικὴ ὡς πρὸς εφ$\frac{\chi}{2}$ καὶ ἐπιλύεται κατὰ τὰ γνωστά.

Ἡ συνθήκη δυνατότητος ἐπιλύσεως τῆς (1) εἶναι:

$$\Delta = 4\alpha^2-4(\gamma+\beta)(\gamma-\beta)\geqq 0 \Longleftrightarrow \alpha^2+\beta^2\geqq\gamma^2$$

2) Ἐὰν $\beta+\gamma=0$, τότε ἡ γραμμικὴ ἐξίσωσις γράφεται:

$$\alpha\eta\mu\chi+\beta\sigma\upsilon\nu\chi=-\beta \Longleftrightarrow \alpha\eta\mu\chi=-\beta(1+\sigma\upsilon\nu\chi)\Longleftrightarrow 2\alpha\eta\mu\frac{\chi}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\chi}{2}=-2\beta\sigma\upsilon\nu^2\frac{\chi}{2}\Longleftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu\frac{\chi}{2}\left(\alpha\eta\mu\frac{\chi}{2}+\beta\sigma\upsilon\nu\frac{\chi}{2}\right)=0 \Longleftrightarrow \begin{cases} \sigma\upsilon\nu\frac{\chi}{2}=0 & (1)\\ \alpha\eta\mu\frac{\chi}{2}+\beta\sigma\upsilon\nu\frac{\chi}{2}=0 & (2)\end{cases}$$

Ἡ γενικὴ λύσις τῆς (1) εἶναι $\chi = 2\kappa\pi+\pi$ $(\kappa\in Z)$. Ἡ (2) γράφεται εφ$\frac{\chi}{2}=\frac{-\beta}{\alpha}$ καὶ ἐπιλύεται κατὰ τὰ γνωστά. Ἐπὶ πλέον, ἐφ' ὅσον $\beta=-\gamma$, προκύπτει $\beta^2=\gamma^2$, ὁπότε $\alpha^2+\beta^2\geqq\gamma^2$.

Ζήτημα 2ο

1η λύση

$$\alpha\cdot\text{συν}B\cdot\text{συν}\Gamma+\beta\cdot\text{συν}\Gamma\cdot\text{συν}A+\gamma\cdot\text{συν}A\cdot\text{συν}B=$$

$$=2R\cdot\text{ημ}A\cdot\text{συν}B\cdot\text{συν}\Gamma+2R\cdot\text{ημ}B\cdot\text{συν}\Gamma\cdot\text{συν}A+2R\cdot\text{ημ}\Gamma\cdot\text{συν}A\cdot\text{συν}B$$

$$=2R\cdot(\text{ημ}A\cdot\text{συν}B+\text{ημ}B\cdot\text{συν}A)\cdot\text{συν}\Gamma+2R\cdot\text{ημ}\Gamma\cdot\text{συν}A\cdot\text{συν}B$$

$$=2R\cdot\text{ημ}(A+B)\cdot\text{συν}\Gamma+2R\cdot\text{ημ}\Gamma\cdot\text{συν}A\cdot\text{συν}B$$

$$=2R\cdot\text{ημ}\Gamma\cdot\text{συν}\Gamma+2R\cdot\text{ημ}\Gamma\cdot\text{συν}A\cdot\text{συν}B$$

$$=2R\cdot\text{ημ}\Gamma\cdot(\text{συν}\Gamma+\text{συν}A\cdot\text{συν}B)$$

$$=2R\cdot\text{ημ}\Gamma\cdot[-\text{συν}(A+B)+\text{συν}A\cdot\text{συν}B]$$

$$=2R\cdot\text{ημ}\Gamma\cdot(\cancel{-\text{συν}A\cdot\text{συν}B}+\text{ημ}A\cdot\text{ημ}B\cancel{+\text{συν}A\cdot\text{συν}B})$$

$$=2R\cdot\text{ημ}A\cdot\text{ημ}B\cdot\text{ημ}\Gamma$$

$$=\cancel{2R}\cdot\frac{\alpha}{\cancel{2R}}\cdot\frac{\beta}{2R}\cdot\frac{\gamma}{2R}$$

$$=\frac{\alpha\cdot\beta\cdot\gamma}{4R}\cdot\frac{1}{R}$$

$$=E\cdot\frac{1}{R}$$

$$=\frac{E}{R}$$

2η λύση

$$\alpha\cdot\text{συν}B\cdot\text{συν}\Gamma+\beta\cdot\text{συν}\Gamma\cdot\text{συν}A+\gamma\cdot\text{συν}A\cdot\text{συν}B=$$

$$=2R\cdot\text{ημ}A\cdot\text{συν}B\cdot\text{συν}\Gamma+2R\cdot\text{ημ}B\cdot\text{συν}\Gamma\cdot\text{συν}A+2R\cdot\text{ημ}\Gamma\cdot\text{συν}A\cdot\text{συν}B$$

$$=2R\cdot\frac{2E}{\beta\cdot\gamma}\cdot\text{συν}B\cdot\text{συν}\Gamma+2R\cdot\frac{2E}{\alpha\cdot\gamma}\cdot\text{συν}\Gamma\cdot\text{συν}A+2R\cdot\frac{2E}{\alpha\cdot\beta}\cdot\text{συν}A\cdot\text{συν}B$$

$$=4R\cdot E\cdot\left(\frac{\text{συν}B\cdot\text{συν}\Gamma}{\beta\cdot\gamma}+\frac{\text{συν}\Gamma\cdot\text{συν}A}{\alpha\cdot\gamma}+\frac{\text{συν}A\cdot\text{συν}B}{\alpha\cdot\beta}\right)$$

$$=4R\cdot E\cdot\left(\frac{\text{συν}B\cdot\text{συν}\Gamma}{2R\cdot\text{ημ}B\cdot2R\cdot\text{ημ}\Gamma}+\frac{\text{συν}\Gamma\cdot\text{συν}A}{2R\cdot\text{ημ}A\cdot2R\cdot\text{ημ}\Gamma}+\frac{\text{συν}A\cdot\text{συν}B}{2R\cdot\text{ημ}A\cdot2R\cdot\text{ημ}B}\right)$$

$$=4R\cdot E\cdot\frac{1}{4R^2}\left(\frac{\text{συν}B}{\text{ημ}B}\cdot\frac{\text{συν}\Gamma}{\text{ημ}\Gamma}+\frac{\text{συν}\Gamma}{\text{ημ}\Gamma}\cdot\frac{\text{συν}A}{\text{ημ}A}+\frac{\text{συν}A}{\text{ημ}A}\cdot\frac{\text{συν}B}{\text{ημ}B}\right)$$

$$=\frac{E}{R}\cdot(\text{σφ}B\cdot\text{σφ}\Gamma+\text{σφ}\Gamma\cdot\text{σφ}A+\text{σφ}A\cdot\text{σφ}B)$$

$$=\frac{E}{R}\cdot1$$

$$=\frac{E}{R}$$

Ζήτημα 3ο

1η λύση

- Αν ΑΒΓ ορθογώνιο, τότε $\sigma\upsilon\nu A = 0$ ή $\sigma\upsilon\nu B = 0$ ή $\sigma\upsilon\nu \Gamma = 0$
  και $\sigma\upsilon\nu A \cdot \sigma\upsilon\nu B \cdot \sigma\upsilon\nu \Gamma = 0$
- Αν ΑΒΓ οξυγώνιο, τότε $\sigma\upsilon\nu A > 0$ και $\sigma\upsilon\nu B > 0$ και $\sigma\upsilon\nu \Gamma > 0$
  άρα $\sigma\upsilon\nu A \cdot \sigma\upsilon\nu B \cdot \sigma\upsilon\nu \Gamma > 0$

Σε κάθε περίπτωση $\sigma\upsilon\nu A \cdot \sigma\upsilon\nu B \cdot \sigma\upsilon\nu \Gamma \geq 0$.

Από νόμο συνημιτόνων έχουμε :

$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma \cdot \sigma\upsilon\nu A \iff \beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2 = 2\beta\gamma \cdot \sigma\upsilon\nu A$ (1)

Όμοια : $\gamma^2 + \alpha^2 - \beta^2 = 2\alpha\gamma \cdot \sigma\upsilon\nu B$ (2)

και $\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 = 2\alpha\beta \cdot \sigma\upsilon\nu \Gamma$ (3)

Θέτω $\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2 = x$, $\gamma^2 + \alpha^2 - \beta^2 = y$ και $\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 = z$.

Είναι : $x + y = 2\gamma^2$ (4), $y + z = 2\alpha^2$ (5) και $z + x = 2\beta^2$ (6)

Επίσης $2\beta\gamma \cdot \sigma\upsilon\nu A = x$ (7), $2\alpha\gamma \cdot \sigma\upsilon\nu B = y$ (8) και $2\alpha\beta \cdot \sigma\upsilon\nu \Gamma = z$ (9)

$(7), (8), (9) \overset{(\cdot)}{\Rightarrow} 2\alpha^2 \cdot 2\beta^2 \cdot 2\gamma^2 \cdot \sigma\upsilon\nu A \cdot \sigma\upsilon\nu B \cdot \sigma\upsilon\nu \Gamma = x \cdot y \cdot z \underset{(6)}{\overset{(4),(5)}{\iff}}$

$(x + y) \cdot (y + z) \cdot (z + x) \cdot \sigma\upsilon\nu A \cdot \sigma\upsilon\nu B \cdot \sigma\upsilon\nu \Gamma = x \cdot y \cdot z \iff$

$$\sigma\upsilon\nu A \cdot \sigma\upsilon\nu B \cdot \sigma\upsilon\nu \Gamma = \frac{x \cdot y \cdot z}{(x + y) \cdot (y + z) \cdot (z + x)} \quad (10)$$

Για x, y, z θετικούς έχουμε :

$(x - y)^2 \geq 0 \iff x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \iff x^2 + 2xy + y^2 \geq 4xy \iff$

$(x + y)^2 \geq 4xy \Rightarrow x + y \geq 2 \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt{y}$ (11)

Όμοια $y + z \geq 2 \cdot \sqrt{y} \cdot \sqrt{z}$ (12) και $z + x \geq 2 \cdot \sqrt{z} \cdot \sqrt{x}$ (13)

$(11), (12), (13) \overset{(\cdot)}{\Rightarrow} (x + y) \cdot (y + z) \cdot (z + x) \geq 8 \cdot x \cdot y \cdot z \iff$

$$\frac{x \cdot y \cdot z}{(x + y) \cdot (y + z) \cdot (z + x)} \leq \frac{1}{8} \overset{(10)}{\iff}$$

$$\sigma\upsilon\nu A \cdot \sigma\upsilon\nu B \cdot \sigma\upsilon\nu \Gamma \leq \frac{1}{8}$$

Επομένως $0 \leq \sigma\upsilon\nu A \cdot \sigma\upsilon\nu B \cdot \sigma\upsilon\nu \Gamma \leq \frac{1}{8}$.

$2^{η}$ λύση

- Αν ΑΒΓ ορθογώνιο, τότε συνΑ = 0 ή συνΒ = 0 ή συν Γ = 0
  και $συνΑ \cdot συνΒ \cdot συνΓ = 0$
- Αν ΑΒΓ οξυγώνιο, τότε συνΑ > 0 και συνΒ > 0 και συν Γ > 0
  άρα $συνΑ \cdot συνΒ \cdot συνΓ > 0$

Σε κάθε περίπτωση $συνΑ \cdot συνΒ \cdot συνΓ \geq 0$.

$$συνω \cdot συνφ - συν^2\frac{ω+φ}{2} = \frac{συν(ω+φ)+συν(ω-φ)}{2} - \frac{1+συν(ω+φ)}{2} \Leftrightarrow$$

$$συνω \cdot συνφ - συν^2\frac{ω+φ}{2} = \frac{συν(ω-φ)-1}{2} \overset{συν(ω-φ)\leq 1}{\Rightarrow}$$

$$συνω \cdot συνφ - συν^2\frac{ω+φ}{2} \leq 0 \Leftrightarrow συνω \cdot συνφ \leq συν^2\frac{ω+φ}{2} \quad \textbf{(1)}$$

$$(1) \underset{φ=Β}{\overset{ω=Α}{\Rightarrow}} συνΑ \cdot συνΒ \leq συν^2\frac{Α+Β}{2} \quad \textbf{(2)}$$

$$(1) \underset{φ=60^0}{\overset{ω=Γ}{\Rightarrow}} συνΓ \cdot συν60^0 \leq συν^2\frac{Γ+60^0}{2} \quad \textbf{(3)}$$

$$(1) \underset{φ=\frac{Γ+60^0}{2}}{\overset{ω=\frac{Α+Β}{2}}{\Rightarrow}} συν\frac{Α+Β}{2} \cdot συν\frac{Γ+60^0}{2} \leq συν^2 60^0 \Leftrightarrow$$

$$συν\frac{Α+Β}{2} \cdot συν\frac{Γ+60^0}{2} \leq \frac{1}{4} \Rightarrow συν^2\frac{Α+Β}{2} \cdot συν^2\frac{Γ+60^0}{2} \leq \frac{1}{16} \quad \textbf{(4)}$$

$$(2), (3), (4) \underset{\text{μέλη μη αρνητικά}}{\overset{(\cdot)}{\Rightarrow}}$$

$$συνΑ \cdot συνΒ \cdot συνΓ \cdot συν60^0 \cdot \cancel{συν^2\frac{Α+Β}{2}} \cdot \cancel{συν^2\frac{Γ+60^0}{2}} \leq \frac{1}{16} \cdot \cancel{συν^2\frac{Α+Β}{2}} \cdot \cancel{συν^2\frac{Γ+60^0}{2}} \Rightarrow$$

$$συνΑ \cdot συνΒ \cdot συνΓ \cdot \frac{1}{2} \leq \frac{1}{16} \Leftrightarrow$$

$$συνΑ \cdot συνΒ \cdot συνΓ \leq \frac{1}{8}$$

Επομένως $0 \leq συνΑ \cdot συνΒ \cdot συνΓ \leq \frac{1}{8}$.