ΓΕΝΙΚΕΣ ΕΙΣΙΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 1969
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ
ΦΥΣΙΚΟΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ ΚΥΚΛΟΣ
Δευτέρα 8 Σεπτεμβρίου 1969

Ζήτημα 1ο

Ἐπίλυσις τοῦ συστήματος : $\begin{cases} x+\psi=\beta \\ \sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu\psi=\alpha \end{cases}$ (Σ)

Τὸ δοθὲν σύστημα ἰσοδυνάμως γράφεται:

$$(\Sigma) \iff \begin{cases} x+\psi=\beta \\ 2\,\sigma\upsilon\nu\dfrac{x+\psi}{2}\sigma\upsilon\nu\dfrac{x-\psi}{2}=\alpha \end{cases} \iff \begin{cases} x+\psi=\beta \\ 2\,\sigma\upsilon\nu\dfrac{\beta}{2}\,\sigma\upsilon\nu\dfrac{x-\psi}{2}=\alpha \end{cases} \quad (1)$$

Διὰ τὴν λύσιν τῆς ἐξισώσεως (1) διακρίνομεν τὰς ἑξῆς περιπτώσεις:

i) Ἐὰν $\sigma\upsilon\nu\dfrac{\beta}{2}\neq 0$ $(\iff \beta\neq 2\kappa\pi+\pi, \kappa\in Z)$, τότε ἡ ἐξίσωσις (1) γράφεται:

$\sigma\upsilon\nu\dfrac{x-\psi}{2}=\dfrac{\alpha}{2\,\sigma\upsilon\nu\dfrac{\beta}{2}}$, ἡ ὁποία εἶναι μία θεμελιώδης τριγωνομετρικὴ ἐξίσωσις. Ἐὰν

$\left|\dfrac{\alpha}{2\,\sigma\upsilon\nu\dfrac{\beta}{2}}\right|>1$, αὕτη εἶναι ἀδύνατος καὶ συνεπῶς τὸ σύστημα εἶναι ἀδύνατον.

Ἐὰν $\left|\dfrac{\alpha}{2\,\sigma\upsilon\nu\dfrac{\beta}{2}}\right|\leq 1$, τότε ὑπάρχει τόξον φ τοιοῦτον, ὥστε $\sigma\upsilon\nu\varphi=\left|\dfrac{\alpha}{2\,\sigma\upsilon\nu\dfrac{\beta}{2}}\right|$ καὶ

ἡ ἐξίσωσις γράφεται $\sigma\upsilon\nu\dfrac{x-\psi}{2}=\sigma\upsilon\nu\varphi$. Ἡ γενικὴ λύσις ταύτης εἶναι $x-\psi=4\kappa\pi\pm 2\varphi$ $(\kappa\in Z)$, ὁπότε τὸ σύστημα (Σ) εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὰ ἀκόλουθα δύο ἀλγεβρικὰ συστήματα:

$$\begin{cases} x+\psi=\beta \\ x-\psi=4\kappa\pi+2\varphi \end{cases}, \quad \begin{cases} x+\psi=\beta \\ x-\psi=4\kappa\pi-2\varphi \end{cases} \quad (\kappa\in Z)$$

Αἱ λύσεις τῶν συστημάτων τούτων ἀντιστοίχως εἶναι: $\left\{ x=2\kappa\pi+\varphi+\dfrac{\beta}{2}, \right.$ $\left. \psi=-2\kappa\pi-\varphi+\dfrac{\beta}{2} \right\}$ καὶ $\left\{ x=2\kappa\pi-\varphi+\dfrac{\beta}{2}, \ \psi=-2\kappa\pi+\varphi+\dfrac{\beta}{2} \right\}$, ὅπου $\kappa\in Z$ καὶ $\beta\neq 2\kappa\pi+\pi, \kappa\in Z$.

ii) Ἐὰν $\sigma\upsilon\nu\dfrac{\beta}{2}=0$ $(\iff \beta=2\kappa\pi+\pi, \kappa\in Z)$, τότε, ἐὰν μὲν $\alpha\neq 0$, ἡ ἐξίσωσις (1) εἶναι ἀδύνατος καὶ συνεπῶς τὸ σύστημα εἶναι ἀδύνατον, ἐὰν δὲ $\alpha=0$, ἡ (1) εἶναι ἀόριστος. Ἐκ τούτου συνάγεται, ὅτι ἡ ἐξίσωσις (1) ἐπαληθεύεται διὰ κάθε ζεῦγος (x,ψ) τόξων καὶ συνεπῶς ἡ λύσις του συστήματος είναι: $x=\theta$, $\psi=\beta-\theta$, μὲ $\theta\in R$ (τυχόν).

Ζήτημα 2ο

$\alpha = 2x + 1, \quad \beta = x^2 + x + 1 \quad$ και $\quad \gamma = x^2 - 1$

Πρέπει : • $2x + 1 > 0 \Leftrightarrow 2x > -1 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{2}$ (1)

• $x^2 + x + 1 > 0 \rightarrow$ ισχύει για κάθε $x \in IR$ $(\Delta < 0)$

• $x^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow x^2 > 1 \Leftrightarrow |x| > 1 \Leftrightarrow x < -1$ ή $x > 1$ (2)

Από (1) και (2) έχουμε ότι $x > 1$

Για $x > 1$ είναι $x^2 > x \overset{+x+1}{\Rightarrow} x^2 + x + 1 > 2x + 1 \Rightarrow \beta > \alpha$

Επίσης για $x > 1$ είναι $x + 1 > -1 \overset{+x^2}{\Rightarrow} x^2 + x + 1 > x^2 - 1 \Rightarrow \beta > \gamma$

Επομένως στο τρίγωνο ΑΒΓ η μεγαλύτερη πλευρά είναι η β

και η μεγαλύτερη γωνία η $\hat{B}$.

Νόμος συνημιτόνων :

$$
\begin{aligned}
\sigma\upsilon\nu B &= \frac{\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2}{2\alpha\gamma} \\
&= \frac{(2x+1)^2 + (x^2-1)^2 - (x^2+x+1)^2}{2\cdot(2x+1)\cdot(x^2-1)} \\
&= \frac{(2x+1)^2 + [(x^2-1)-(x^2+x+1)]\cdot[(x^2-1)+(x^2+x+1)]}{2\cdot(2x+1)\cdot(x^2-1)} \\
&= \frac{(2x+1)^2 + (-x-2)\cdot(2x^2+x)}{2\cdot(2x+1)\cdot(x^2-1)} \\
&= \frac{(2x+1)^2 + (-x-2)\cdot x\cdot(2x+1)}{2\cdot(2x+1)\cdot(x^2-1)} \\
&= \frac{\cancel{(2x+1)}\cdot[2x+1+x\cdot(-x-2)]}{2\cdot\cancel{(2x+1)}\cdot(x^2-1)} \\
&= \frac{\cancel{2x} + 1 - x^2 \cancel{-2x}}{2\cdot(x^2-1)} \\
&= \frac{-\cancel{(x^2-1)}}{2\cdot\cancel{(x^2-1)}} \\
&= -\frac{1}{2} \\
&= \sigma\upsilon\nu 120^0
\end{aligned}
$$

Επομένως $\hat{B} = 120^0$.

Ζήτημα 3^{o}

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^0 \;\Leftrightarrow\; \beta + \gamma = 180^0 - \alpha \;\Leftrightarrow\; \frac{\beta+\gamma}{2} = 90^0 - \frac{\alpha}{2} \;(1)$$

$$\etaμ\alpha = συν\beta + συν\gamma \;\Leftrightarrow$$

$$\cancel{2}\cdot ημ\frac{\alpha}{2}\cdot συν\frac{\alpha}{2} = \cancel{2}\cdot συν\frac{\beta+\gamma}{2}\cdot συν\frac{\beta-\gamma}{2} \;\overset{(1)}{\Leftrightarrow}$$

$$ημ\frac{\alpha}{2}\cdot συν\frac{\alpha}{2} = συν\left(90^0 - \frac{\alpha}{2}\right)\cdot συν\frac{\beta-\gamma}{2} \;\Leftrightarrow$$

$$\cancel{ημ\frac{\alpha}{2}}\cdot συν\frac{\alpha}{2} = \cancel{ημ\frac{\alpha}{2}}\cdot συν\frac{\beta-\gamma}{2} \;\overset{ημ\frac{\alpha}{2}\neq 0}{\Leftrightarrow}$$

$$συν\frac{\alpha}{2} = συν\frac{\beta-\gamma}{2} \;\underset{-90^0<\beta-\gamma<90^0}{\overset{0^0<\alpha<90^0}{\Rightarrow}}$$

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{\beta-\gamma}{2} \;\text{ ή }\; \frac{\alpha}{2} = -\frac{\beta-\gamma}{2} \;\Leftrightarrow$$

$$\alpha = \beta - \gamma \;\text{ ή }\; \alpha = -\beta + \gamma \;\Leftrightarrow$$

$$\alpha + \gamma = \beta \;\text{ ή }\; \alpha + \beta = \gamma \;\Leftrightarrow$$

$$180^0 - \beta = \beta \;\text{ ή }\; 180^0 - \gamma = \gamma \;\Leftrightarrow$$

$$2\beta = 180^0 \;\text{ ή }\; 2\gamma = 180^0 \;\Leftrightarrow$$

$$\beta = 90^0 \;\text{ ή }\; \gamma = 90^0$$