

ΓΕΝΙΚΕΣ ΕΙΣΙΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 1969

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

ΓΕΩΠΟΝΟΔΑΣΟΛΟΓΙΚΟΣ ΚΥΚΛΟΣ

Σάββατο 13 Σεπτεμβρίου 1969

Ζήτημα 1°

Μέτρησις και μέτρον τόξου. Διά να μετρήσωμεν ἓν τόξον, πρέπει να συγκρίνωμεν αὐτό πρὸς ἓν ὠρισμένον τόξον, τὸ ὁποῖον λαμβάνεται ὡς **μονὰς τῶν τόξων**.

Ἐκ τῆς συγκρίσεως ταύτης προκύπτει εἰς ἀριθμὸς, ὁ ὁποῖος λέγεται **μέτρον** τοῦ μετρηθέντος τόξου. Οὗτος φανερώνει ἀπὸ πόσας μονάδας ἢ καὶ μέρη αὐτῆς ἀποτελεῖται τὸ τόξον τοῦτο.

Τὸ μέτρον τόξου T σημειώνομεν συντόμως οὕτω : (\widehat{T}) .

Ὁ βαθμὸς, ἦτοι τὸ $\frac{1}{400}$ τῆς περιφερείας. Ὁ βαθμὸς διαιρεῖται εἰς 100 ἴσα μέρη, τὰ ὁποῖα λέγονται *πρῶτα λεπτά*. Ἐκαστον δὲ πρῶτον λεπτὸν διαιρεῖται εἰς 100 *δεύτερα λεπτά*. Ἐν μέτρον π.χ. 25 βαθμῶν καὶ 35 πρώτων λεπτῶν σημειοῦται οὕτως : 25Υ, 35.

Σχέσεις τῶν μέτρων τοῦ αὐτοῦ τόξου: $\frac{\mu}{180} = \frac{\beta}{200} = \frac{\alpha}{\pi}$

Μέτρησις γωνίας. Διά να μετρήσωμεν μίαν γωνίαν, πρέπει να συγκρίνωμεν αὐτὴν πρὸς μίαν ὠρισμένην γωνίαν.

Αὕτη λέγεται **μονὰς τῶν γωνιῶν**.

Ἀπὸ τὴν σύγκρισιν δὲ αὐτὴν προκύπτει εἰς ἀριθμὸς. Αὐτὸς λέγεται **μέτρον** τῆς μετρηθείσης γωνίας φανερώνει δὲ ἀπὸ πόσας μονάδας ἢ καὶ μέρη αὐτῆς ἀποτελεῖται ἡ γωνία αὕτη.

Ζήτημα 2°

$$\begin{aligned} \text{Πρέπει } 4\eta\mu^2x - 1 \geq 0 &\Leftrightarrow 4\eta\mu^2x \geq 1 \Leftrightarrow \eta\mu^2x \geq \frac{1}{4} \Leftrightarrow |\eta\mu x| \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \\ \eta\mu x \geq \frac{1}{2} \text{ ή } \eta\mu x \leq -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

- Αν $\eta\mu x \geq \frac{1}{2}$:

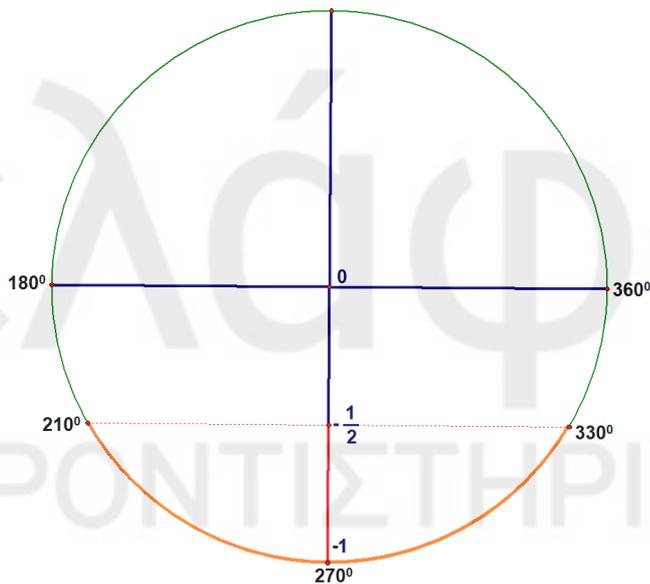
$$\sqrt{4\eta\mu^2x - 1} > 1 + 3\eta\mu x \quad \begin{array}{l} \text{μέλη μη} \\ \text{αρνητικά} \end{array} \Rightarrow 4\eta\mu^2x - 1 > (1 + 3\eta\mu x)^2 \Leftrightarrow$$

$$4\eta\mu^2x - 1 > 1 + 6\eta\mu x + 9\eta\mu^2x \Leftrightarrow 5\eta\mu^2x + 6\eta\mu x + 2 < 0$$

η οποία είναι αδύνατη διότι το τριώνυμο $5\omega^2 + 6\omega + 2$ έχει $\Delta < 0$ και είναι θετικό για κάθε $\omega \in \mathbb{R}$.

- Αν $\eta\mu x \leq -\frac{1}{2}$ η ανίσωση ισχύει, διότι $\sqrt{4\eta\mu^2x - 1} \geq 0 > 1 + 3\eta\mu x$

Λύνουμε την ανίσωση $\eta\mu x \leq -\frac{1}{2}$



$$\eta\mu x \leq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$360^\circ \cdot \kappa + 210^\circ \leq x \leq 360^\circ \cdot \kappa + 330^\circ, \kappa \in \mathbb{Z}.$$

Ζήτημα 3°

1^η εκδοχή

$\hat{A} = 123^\circ$, $\alpha = 121,6\text{m}$ και $\beta - \gamma = 29,54\text{m}$.

$$\eta\mu \frac{B - \Gamma}{2} = \frac{\beta - \gamma}{\alpha} \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{A}{2} \Rightarrow \eta\mu \frac{B - \Gamma}{2} = \frac{29,54}{121,6} \cdot \sigma\upsilon\nu 61^\circ 30' \Rightarrow$$

$$\eta\mu \frac{B - \Gamma}{2} = 0,115915 \Rightarrow \frac{\hat{B} - \hat{\Gamma}}{2} = 6^\circ 39' 23'' \Rightarrow \hat{B} - \hat{\Gamma} = 13^\circ 18' 46'' \quad (1)$$

$$\hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ - \hat{A} \Rightarrow \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ - 123^\circ \Rightarrow \hat{B} + \hat{\Gamma} = 57^\circ \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow 2\hat{B} = 70^\circ 18' 46'' \Rightarrow \boxed{\hat{B} = 35^\circ 9' 23''}$$

$$(2) \Rightarrow \hat{\Gamma} = 57^\circ - \hat{B} \Rightarrow \hat{\Gamma} = 57^\circ - 35^\circ 9' 23'' \Rightarrow \boxed{\hat{\Gamma} = 21^\circ 50' 37''}$$

$$\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} \Rightarrow \frac{121,6}{\eta\mu 123^\circ} = \frac{\beta}{\eta\mu 35^\circ 9' 23''} \Rightarrow \boxed{\beta = 83,49\text{m}}$$

$$\beta - \gamma = 29,54 \Rightarrow \gamma = 83,49 - 29,54 \Rightarrow \boxed{\gamma = 53,95\text{m}}$$

$$E = \frac{1}{2} \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \eta\mu A \Rightarrow E = \frac{1}{2} \cdot 83,49 \cdot 53,95 \cdot \eta\mu 123^\circ \Rightarrow \boxed{E = 1.888,8\text{m}^2}$$

2^η εκδοχή

$\hat{A} = 123^\circ$, $\alpha = 181,6\text{m}$ και $\beta - \gamma = 29,54\text{m}$.

$$\eta\mu \frac{B - \Gamma}{2} = \frac{\beta - \gamma}{\alpha} \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{A}{2} \Rightarrow \eta\mu \frac{B - \Gamma}{2} = \frac{29,54}{181,6} \cdot \sigma\upsilon\nu 61^\circ 30' \Rightarrow$$

$$\eta\mu \frac{B - \Gamma}{2} = 0,07761712 \Rightarrow \frac{\hat{B} - \hat{\Gamma}}{2} = 4^\circ 27' 06'' \Rightarrow \hat{B} - \hat{\Gamma} = 8^\circ 54' 12'' \quad (1)$$

$$\hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ - \hat{A} \Rightarrow \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ - 123^\circ \Rightarrow \hat{B} + \hat{\Gamma} = 57^\circ \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow 2\hat{B} = 65^\circ 54' 12'' \Rightarrow \boxed{\hat{B} = 32^\circ 57' 6''}$$

$$(2) \Rightarrow \hat{\Gamma} = 57^\circ - \hat{B} \Rightarrow \hat{\Gamma} = 57^\circ - 32^\circ 57' 6'' \Rightarrow \boxed{\hat{\Gamma} = 24^\circ 2' 54''}$$

$$\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} \Rightarrow \frac{181,6}{\eta\mu 123^\circ} = \frac{\beta}{\eta\mu 32^\circ 57' 6''} \Rightarrow \boxed{\beta = 117,78\text{m}}$$

$$\beta - \gamma = 29,54 \Rightarrow \gamma = 117,78 - 29,54 \Rightarrow \boxed{\gamma = 88,24\text{m}}$$

$$E = \frac{1}{2} \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \eta\mu A \Rightarrow E = \frac{1}{2} \cdot 117,78 \cdot 88,24 \cdot \eta\mu 123^\circ \Rightarrow \boxed{E = 4.358,1\text{m}^2}$$