ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΔΕΥΤΕΡΑ 11 ΙΟΥΝΙΟΥ 2018

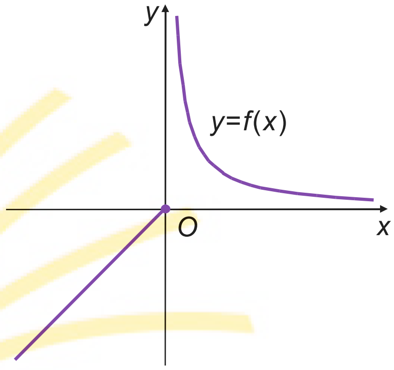
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 99

Α2. α. Ψ

β. Αντιπαράδειγμα στο διπλανό σχήμα



Α3. Σχολικό βιβλίο σελίδα 216

Α4. α. Λάθος, **β.** Λάθος, **γ.** Σωστό, **δ.** Σωστό, **ε.** Σωστό.

ΘΕΜΑ Β

Β1. $f'(x) = \left(x - \dfrac{4}{x^2}\right)' = 1 + \dfrac{8}{x^3} = \dfrac{x^3 + 8}{x^3}, \ x \neq 0$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^3 + 8}{x^3} = 0 \Leftrightarrow x^3 + 8 = 0 \Leftrightarrow x^3 = -8 \Leftrightarrow x = -2$$

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$x^3 + 8$		$-$	0	$+$		$+$	
x^3		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	
f		$\nearrow$		$\searrow$	$\|\|$	$\nearrow$	

Η f είναι γνησίως αύξουσα στα $(-\infty, -2]$ και $(0, +\infty)$, ενώ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-2, 0)$.

Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο για $x = -2$, την τιμή

$$f(-2) = -2 - \frac{4}{(-2)^2} = -2 - 1 = -3.$$

Β2. $f''(x) = \left(1 + \dfrac{8}{x^3}\right)' = -\dfrac{24}{x^4},\ x \neq 0$

Είναι $f''(x) < 0$ για κάθε $x \in IR^*$,

άρα η f είναι κοίλη στα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$ και δεν έχει σημεία καμπής.

Β3. • Κατακόρυφες ασύμπτωτες

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(x - \dfrac{4}{x^2}\right) = -\infty$, διότι $\lim\limits_{x\to 0^+} x = 0$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{4}{x^2} = +\infty$

άρα η C_f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την $x = 0$ (y΄y)

ή

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}\left(x - \dfrac{4}{x^2}\right) = -\infty$, διότι $\lim\limits_{x\to 0^-} x = 0$ και $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{4}{x^2} = +\infty$

άρα η C_f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την $x = 0$ (y΄y)

• Πλάγιες- οριζόντιες ασύμπτωτες

▷ στο $-\infty$:

$\lim\limits_{x\to -\infty}[f(x) - x] = \lim\limits_{x\to -\infty}\left(-\dfrac{4}{x^2}\right) = 0$, διότι $\lim\limits_{x\to -\infty} x^2 = +\infty$

άρα η C_f έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $-\infty$ την $y = x$

▷ στο $+\infty$:

$\lim\limits_{x\to +\infty}[f(x) - x] = \lim\limits_{x\to +\infty}\left(-\dfrac{4}{x^2}\right) = 0$, διότι $\lim\limits_{x\to +\infty} x^2 = +\infty$

άρα η C_f έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την $y = x$

ή

▷ στο $-\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-\dfrac{4}{x^2}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\dfrac{x^3-4}{x^2}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-4}{x^3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x^3}=1=\lambda$$

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-\lambda x]=\lim_{x\to-\infty}\left(x-\frac{4}{x^2}-x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{4}{x^2}\right)=0=\beta$$

άρα η C_f έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $-\infty$ την $y=x$

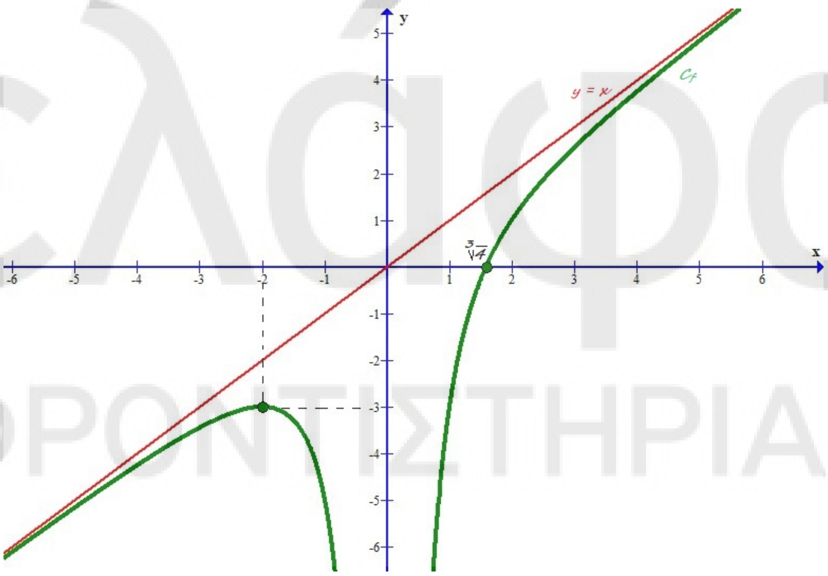
▷ στο $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-\dfrac{4}{x^2}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{x^3-4}{x^2}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-4}{x^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^3}=1=\lambda$$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-\lambda x]=\lim_{x\to+\infty}\left(x-\frac{4}{x^2}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{4}{x^2}\right)=0=\beta$$

άρα η C_f έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την $y=x$

B4.



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Αν x είναι το μήκος του σύρματος για να σχηματιστεί το τετράγωνο, τότε η πλευρά του τετραγώνου είναι $\frac{x}{4}$ m.

$$E_{\text{τετραγώνου}} = \left(\frac{x}{4}\right)^2 = \frac{x^2}{16}\ m^2,\ 0 < x < 8$$

Το μήκος του σύρματος που χρησιμοποιήθηκε για τον σχηματισμό του κύκλου έχει μήκος $(8 - x)$ m.

μήκος κύκλου $L = 2\pi\rho \iff 8 - x = 2\pi\rho \iff \rho = \frac{8 - x}{2\pi}$ m

$$E_{\text{κύκλου}} = \pi\rho^2 = \pi\left(\frac{8 - x}{2\pi}\right)^2 = \cancel{\pi}\frac{(8 - x)^2}{4\pi^{\cancel{2}}} = \frac{x^2 - 16x + 64}{4\pi}\ m^2$$

$$E(x) = \frac{x^2}{16} + \frac{x^2 - 16x + 64}{4\pi} = \frac{\pi x^2}{16\pi} + \frac{4x^2 - 64x + 256}{16\pi}$$

$$= \frac{\pi x^2 + 4x^2 - 64x + 256}{16\pi} = \frac{(\pi + 4)x^2 - 64x + 256}{16\pi},\ x \in (0, 8)$$

Γ2. $$E'(x) = \left[\frac{(\pi + 4)x^2 - 64x + 256}{16\pi}\right]' = \frac{2(\pi + 4)x - 64}{16\pi} = \frac{(\pi + 4)x - 32}{8\pi}$$

$$E'(x) = 0 \iff \frac{(\pi + 4)x - 32}{8\pi} = 0 \iff (\pi + 4)x - 32 = 0 \iff x = \frac{32}{\pi + 4}$$

x	0	$\frac{32}{\pi + 4}$	8
$E'(x)$	$-$	0	$+$
$E(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

Το εμβαδόν γίνεται ελάχιστο όταν $x = \frac{32}{\pi + 4}$ m.

Όταν $x = \dfrac{32}{\pi + 4}$, τότε : πλευρά τετραγώνου $= \dfrac{x}{4} = \dfrac{\dfrac{32}{\pi+4}}{4} = \dfrac{8}{\pi + 4}$ m

διάμετρος κύκλου $= 2\rho = \cancel{2}\dfrac{8 - x}{\cancel{2}\pi} = \dfrac{8 - \dfrac{32}{\pi+4}}{\pi} = \dfrac{\dfrac{8\pi}{\pi+4}}{\pi} = \dfrac{8}{\pi + 4}$ m

Επομένως όταν το E γίνεται ελάχιστο, τότε
η πλευρά του τετραγώνου είναι ίση με τη διάμετρο του κύκλου.

Γ3. 1η λύση

Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $E(x) = 5$ έχει ακριβώς μία λύση

- $\Delta_1 = \left(0\ ,\ \dfrac{32}{\pi + 4}\right)$

$$\left.\begin{aligned}
&\text{Η } E \text{ είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο } \Delta_1\\
&\lim_{x\to 0^+} E(x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{(\pi+4)x^2 - 64x + 256}{16\pi} = \frac{256}{16\pi} = \frac{16}{\pi}\\
&\lim_{x\to \frac{32}{\pi+4}^-} E(x) = \lim_{x\to \frac{32}{\pi+4}^-}\frac{(\pi+4)x^2 - 64x + 256}{16\pi} = \frac{16}{\pi+4}
\end{aligned}\right\} \Rightarrow E(\Delta_1) = \left(\frac{16}{\pi+4}\ ,\ \frac{16}{\pi}\right)$$

Είναι $5 \in \left(\dfrac{16}{\pi + 4}\ ,\ \dfrac{16}{\pi}\right)$, άρα υπάρχει μοναδικό $x_0 \in \Delta_1$ ώστε $E(x_0) = 5\ m^2$

- $\Delta_2 = \left(\dfrac{32}{\pi + 4}\ ,\ 8\right)$

$$\left.\begin{aligned}
&\text{Η } E \text{ είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο } \Delta_2\\
&E\left(\frac{32}{\pi+4}\right) = \frac{16}{\pi+4}\\
&\lim_{x\to 8^-} E(x) = \lim_{x\to 8^-}\frac{(\pi+4)x^2 - 64x + 256}{16\pi} = \frac{64\pi}{16\pi} = 4
\end{aligned}\right\} \Rightarrow E(\Delta_2) = \left[\frac{16}{\pi+4}\ ,\ 4\right)$$

Είναι $5 \notin \left[\dfrac{16}{\pi + 4}\ ,\ 4\right)$, άρα η εξίσωση $E(x) = 5$ είναι αδύνατη στο Δ_2

Επομένως η εξίσωση $E(x) = 5$ έχει ακριβώς μια λύση.

Γ3. 2η λύση

Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $E(x) = 5$ έχει ακριβώς μία λύση

$E(x) = 5 \Leftrightarrow$

$\dfrac{(\pi + 4)x^2 - 64x + 256}{16\pi} = 5 \Leftrightarrow$

$(\pi + 4)x^2 - 64x + 256 = 80\pi \Leftrightarrow$

$(\pi + 4)x^2 - 64x + 256 - 80\pi = 0 \Leftrightarrow$

$(\pi + 4)x^2 - 64x + 16(16 - 5\pi) = 0$

Θεωρώ το τριώνυμο $P(x) = (\pi + 4)x^2 - 64x + 16(16 - 5\pi),\ x \in \mathbb{R}$

$\Delta = (-64)^2 - 4\cdot(\pi + 4)\cdot 16(16 - 5\pi)$

$= 64^2 - 64\cdot(\pi + 4)\cdot(16 - 5\pi)$

$= 64^2 - 64\cdot(16\pi - 5\pi^2 + 64 - 20\pi)$

$= 64\cdot(64 - 16\pi + 5\pi^2 - 64 + 20\pi)$

$= 64\cdot(5\pi^2 + 4\pi) > 0$

άρα το τριώνυμο $(\pi + 4)x^2 - 64x + 16(16 - 5\pi)$ έχει δύο ρίζες x_1, x_2

Έστω ότι $x_1 < x_2$

Το πρόσημο του $P(x)$ φαίνεται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$P(x)$		+	0	-	0	+	

$P(0) = 16(16 - 5\pi) > 0$

$P(8) = (\pi + 4)\cdot 64 - 64\cdot 8 + 16(16 - 5\pi)$

$= 64\pi + 256 - 512 + 256 - 80\pi = -16\pi < 0$

Επομένως $x_1 < 8 < x_2$, άρα $0 < x_1 < 8 < x_2$

Άρα η εξίσωση $P(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα x_1 στο διάστημα $(0, 8)$

δηλαδή η εξίσωση $E(x) = 5$ έχει ακριβώς μια λύση.

Γ3. **3η λύση**

Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $E(x) = 5$ έχει ακριβώς μία λύση

$E(x) = 5 \Leftrightarrow$

$\dfrac{(\pi+4)x^2 - 64x + 256}{16\pi} = 5 \Leftrightarrow$

$(\pi+4)x^2 - 64x + 256 = 80\pi \Leftrightarrow$

$(\pi+4)x^2 - 64x + 256 - 80\pi = 0 \Leftrightarrow$

$(\pi+4)x^2 - 64x + 16(16-5\pi) = 0$

Θεωρώ το τριώνυμο $P(x) = (\pi+4)x^2 - 64x + 16(16-5\pi)$, $x \in \mathbb{R}$

Η $P(x)$ είναι συνεχής στα $[0, 8]$ και $[8, 9]$ ως πολυωνυμική

$P(0) = 16(16-5\pi) > 0$

$P(8) = (\pi+4)\cdot 64 - 64\cdot 8 + 16(16-5\pi) = -16\pi < 0$

$P(9) = (\pi+4)\cdot 81 - 64\cdot 9 + 16(16-5\pi) = \pi + 4 > 0$

Από Θ. Bolzano υπάρχουν $x_1 \in (0, 8)$ και $x_2 \in (8, 9)$,

τέτοια ώστε $P(x_1) = P(x_2) = 0$

Το τριώνυμο όμως έχει δύο το πολύ ρίζες,

άρα τα x_1, x_2 είναι μοναδικά.

Επομένως $0 < x_1 < 8 < x_2 < 9$

Η εξίσωση $P(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα x_1 στο διάστημα $(0, 8)$

δηλαδή η εξίσωση $E(x) = 5$ έχει ακριβώς μια λύση,

άρα υπάρχει ένας μόνο τρόπος με τον οποίο μπορεί να κοπεί το σύρμα μήκους 8 m, ώστε το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων να ισούται με $5\ m^2$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $f'(x) = (2e^{x-\alpha} - x^2)' = 2e^{x-\alpha} - 2x,\ x \in \mathbb{R}$

$f''(x) = (2e^{x-\alpha} - 2x)' = 2e^{x-\alpha} - 2,\ x \in \mathbb{R}$

$f''(x) = 0 \iff 2e^{x-\alpha} = 2 \iff e^{x-\alpha} = 1 \iff x - \alpha = 0 \iff x = \alpha$

$f''(x) > 0 \iff 2e^{x-\alpha} > 2 \iff e^{x-\alpha} > 1 \iff x - \alpha > 0 \iff x > \alpha$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
f΄΄	-	0	+
f	∩		∪

$f(\alpha) = 2 - \alpha^2$, άρα μοναδικό σημείο καμπής $A(\alpha\ ,\ 2 - \alpha^2)$, για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$

Δ2. **1η λύση**

x	$-\infty$	α	$+\infty$
f΄΄	-	0	+
f΄	↘		↗

- $\Delta_1 = (-\infty\ ,\ \alpha)$

$$\left.\begin{array}{l} f' \text{ είναι συνεχής και γν. φθίνουσα στο } \Delta_1 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} f'(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(2e^{x-\alpha} - 2x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to\alpha^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to\alpha^-}(2e^{x-\alpha} - 2x) = 2 - 2\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow f'(\Delta_1) = (2-2\alpha\ ,\ +\infty)$$

Είναι $2 - 2\alpha < 0$, αφού $\alpha > 1$, άρα $0 \in f'(\Delta_1)$, δηλαδή υπάρχει μοναδικό $x_1 \in \Delta_1$, τέτοιο ώστε $f'(x_1) = 0$

ή

$$\left.\begin{array}{l} f' \text{ είναι συνεχής στο } [0\ ,\ 1] \subseteq \Delta_1 \\ f'(0) = 2e^{-\alpha} > 0 \\ f'(1) = 2e^{1-\alpha} - 2 < 0, \text{ διότι } \alpha > 1 \end{array}\right\} \overset{\text{Θ. Bolzano}}{\Rightarrow} \text{ υπάρχει } x_1 \in (0\ ,\ 1) \subseteq \Delta_1$$

ώστε $f'(x_1) = 0$ και επειδή f' γν. φθίνουσα στο Δ_1 είναι μοναδικό.

Η λύση αυτή μας βρίσκει ότι $x_1 < 1$ που μπορεί να χρησιμοποιηθεί στο Δ3

- $\Delta_2 = [\alpha\,,+\infty)$

Η f΄ είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο Δ_2

$f'(\alpha) = 2 - 2\alpha$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(2e^{x-\alpha} - 2x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[e^{x-\alpha}\left(2 - 2\dfrac{x}{e^{x-\alpha}}\right)\right] = +\infty$ $\Rightarrow$

διότι $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x-\alpha} = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^{x-\alpha}} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{DL'H}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^{x-\alpha}} = 0$

$f'(\Delta_2) = [2 - 2\alpha\,,+\infty)$

Είναι $0 \in f'(\Delta_2)$, δηλαδή υπάρχει μοναδικό $x_2 \in \Delta_2$,
τέτοιο ώστε $f'(x_2) = 0$

- $x < x_1 \overset{f'\downarrow}{\Rightarrow} f'(x) > f'(x_1) \Leftrightarrow f'(x) > 0$
- $x_1 < x \le \alpha \overset{f'\downarrow}{\Rightarrow} f'(x) < f'(x_1) \Leftrightarrow f'(x) < 0$
- $\alpha < x < x_2 \overset{f'\uparrow}{\Rightarrow} f'(x) < f'(x_2) \Leftrightarrow f'(x) < 0$
- $x > x_2 \overset{f'\downarrow}{\Rightarrow} f'(x) > f'(x_2) \Leftrightarrow f'(x) > 0$

x	$-\infty$	x_1	α	x_2	$+\infty$
f΄	+	0	-	0	+
f	↗		↘		↗

Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x_1 και τοπικό ελάχιστο στο x_2.

Δ2. 2η λύση (χωρίς τη "βοήθεια" της f'')

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2e^{x-\alpha} - 2x = 0 \Leftrightarrow e^{x-\alpha} = x \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x - \alpha = \ell nx \Leftrightarrow \ell nx - x + \alpha = 0$$

Θεωρούμε συνάρτηση φ, με $\varphi(x) = \ell nx - x + \alpha$, $x > 0$

$$\varphi'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}, \quad x > 0$$

x	0		1		+∞
φ΄		+	0	-	
φ		↗		↘	

- $\Delta_1 = (0, 1)$. Η φ είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο Δ_1

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^+} \varphi(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}(\ell nx - x + \alpha) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 1^-} \varphi(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}(\ell nx - x + \alpha) = \alpha - 1 > 0, \text{ αφού } \alpha > 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \varphi(\Delta_1) = (\infty, \alpha - 1)$$

Είναι $0 \in \varphi(\Delta_1)$, δηλαδή υπάρχει μοναδικό $x_1 \in (0, 1)$,
τέτοιο ώστε $\varphi(x_1) = 0 \Leftrightarrow f'(x_1) = 0$

- $\Delta_1 = [1, +\infty)$. Η φ είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο Δ_2

$$\left.\begin{array}{l} \varphi(1) = \alpha - 1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(\ell nx - x + \alpha) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(\frac{\ell nx + \alpha}{x} - 1\right)\right] = -\infty \\ \text{διότι } \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty \text{ και } \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ell nx + \alpha}{x} \underset{DL'H}{=} \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \varphi(\Delta_2) = (\infty, \alpha - 1]$$

Είναι $0 \in \varphi(\Delta_2)$, δηλαδή υπάρχει μοναδικό $x_2 \in (1, +\infty)$,
τέτοιο ώστε $\varphi(x_2) = 0 \Leftrightarrow f'(x_2) = 0$

x	-∞	0	x_1	1	α	x_2	+∞
f΄		+	0		-	0	+
f		↗			↘		↗

$f'(0) = 2e^{-\alpha} > 0$, $f'(1) = 2e^{1-\alpha} - 2 < 0$, $f'(\alpha) = 2 - 2\alpha < 0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$

Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x_1 και τοπικό ελάχιστο στο x_2.

Η λύση αυτή μας βρίσκει ότι $x_1 < 1$, για να το χρησιμοποιήσουμε στο Δ3 .

Δ3. 1^{ος} τρόπος

Για $\alpha < x < x_2 \overset{f\downarrow}{\Rightarrow} f(\alpha) > f(x)$.

Αρκεί να δείξουμε ότι $f(1) > f(\alpha) \Leftrightarrow 2e^{1-\alpha} - 1 > 2 - \alpha^2 \Leftrightarrow 2e^{1-\alpha} + \alpha^2 - 3 > 0$

Θεωρούμε συνάρτηση g, με $g(x) = 2e^{1-x} + x^2 - 3,\ x \geq 1$

$g'(x) = -2e^{1-x} + 2x$ και $g''(x) = 2e^{1-x} + 2,\ x \geq 1$

Είναι $g''(x) > 0$, άρα g' είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$

Για $x > 1 \overset{g'\uparrow}{\Rightarrow} g'(x) > g'(1) \Leftrightarrow g'(x) > 0$ και επειδή g συνεχής στο $[1, +\infty)$, η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$.

Είναι $\alpha > 1 \overset{g\uparrow}{\Rightarrow} g(\alpha) > g(1) \Leftrightarrow 2e^{1-\alpha} + \alpha^2 - 3 > 0 \Leftrightarrow f(1) > f(\alpha)$

Επομένως για κάθε $x \in (\alpha, x_2)$ είναι $f(1) > f(\alpha) > f(x)$

δηλαδή η εξίσωση $f(x) = f(1)$ είναι αδύνατη στο (α, x_2).

Δ3. 2^{ος} τρόπος

Για $\alpha < x < x_2 \overset{f\downarrow}{\Rightarrow} f(\alpha) > f(x)$.

Αρκεί να δείξουμε ότι $f(1) > f(\alpha) \Leftrightarrow 2e^{1-\alpha} - 1 > 2 - \alpha^2 \Leftrightarrow 2e^{1-\alpha} + \alpha^2 - 3 > 0$

Είναι $e^x \geq x + 1 \overset{x = 1-\alpha}{\Rightarrow} e^{1-\alpha} \geq 1 - \alpha + 1 \Leftrightarrow e^{1-\alpha} \geq 2 - \alpha \Leftrightarrow$

$2e^{1-\alpha} \geq 4 - 2\alpha \Leftrightarrow 2e^{1-\alpha} + \alpha^2 - 3 \geq 4 - 2\alpha + \alpha^2 - 3 \Leftrightarrow$

$2e^{1-\alpha} + \alpha^2 - 3 \geq \alpha^2 - 2\alpha + 1 \Leftrightarrow 2e^{1-\alpha} + \alpha^2 - 3 \geq (\alpha - 1)^2 \Leftrightarrow$

$2e^{1-\alpha} + \alpha^2 - 3 \geq (\alpha - 1)^2 > 0$, διότι $\alpha > 1$.

Επομένως για κάθε $x \in (\alpha, x_2)$ είναι $f(1) > f(\alpha) > f(x)$

δηλαδή η εξίσωση $f(x) = f(1)$ είναι αδύνατη στο (α, x_2).

Δ3. 3^{ος} τρόπος

Αρκεί να δείξουμε ότι $x_1 < 1 < \alpha$. Είναι $f'(1) = 2(e^{1-\alpha} - 1)$.

$\alpha > 1 \Leftrightarrow 1 - \alpha < 0 \Leftrightarrow e^{1-\alpha} < 1 \Leftrightarrow 2(e^{1-\alpha} - 1) < 0 \Leftrightarrow f'(1) < 0$

$f'(x) < 0$ είναι μόνο στο διάστημα (x_1, x_2), άρα $x_1 < 1 < x_2$

Για κάθε $x \in (\alpha, x_2) : x_1 < 1 < \alpha < x < x_2 \overset{f\downarrow}{\Rightarrow} f(1) > f(\alpha) > f(x) > f(x_2)$

δηλαδή η εξίσωση $f(x) = f(1)$ είναι αδύνατη στο (α, x_2).

Δ3. 4ος τρόπος

Αρκεί να δείξουμε ότι $x_1 < 1 < \alpha$. Είναι $f'(1) = 2(e^{1-\alpha} - 1)$.

$\alpha > 1 \Leftrightarrow 1 - \alpha < 0 \Leftrightarrow e^{1-\alpha} < 1 \Leftrightarrow 2(e^{1-\alpha} - 1) < 0 \Leftrightarrow f'(1) < 0$

$f'(x) < 0$ είναι μόνο στο διάστημα (x_1, x_2), άρα $x_1 < 1 < x_2$

Έστω ότι υπάρχει $x_0 \in (\alpha, x_2)$, τέτοιο ώστε $f(x_0) = f(1)$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[1, x_0]$, άρα από Θ.Rolle

υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, x_0)$, τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$

Άτοπο ($x_1 < 1 < \xi < x_0 < x_2$ και οι μοναδικές ρίζες της f' είναι τα x_1 και x_2).

Επομένως η εξίσωση $f(x) = f(1)$ είναι αδύνατη στο (α, x_2).

Δ3. 5ος τρόπος

Αρκεί να δείξουμε ότι $x_1 < 1 < \alpha$.

Έστω $x_1 \geq 1 \overset{f'\downarrow}{\Rightarrow} f'(x_1) \leq f'(1) \Leftrightarrow 0 \leq f'(1) \Leftrightarrow 0 \leq 2e^{1-\alpha} - 2 \Leftrightarrow$

$2 \leq 2e^{1-\alpha} \Leftrightarrow 1 \leq e^{1-\alpha} \Leftrightarrow e^0 \leq e^{1-\alpha} \Leftrightarrow 0 \leq 1 - \alpha \Leftrightarrow \alpha \leq 1$

που είναι άτοπο διότι $\alpha > 1$, άρα $x_1 < 1 < x_2$

Για κάθε $x \in (\alpha, x_2)$ είναι : $x_1 < 1 < \alpha < x < x_2 \overset{f\downarrow}{\Rightarrow} f(1) > f(\alpha) > f(x) > f(x_2)$

δηλαδή η εξίσωση $f(x) = f(1)$ είναι αδύνατη στο (α, x_2).

Δ3. 6ος τρόπος

Αρκεί να δείξουμε ότι $x_1 < 1 < \alpha$.

Έστω $x_1 \geq 1 \overset{f'\downarrow}{\Rightarrow} f'(x_1) \leq f'(1) \Leftrightarrow 0 \leq f'(1) \Leftrightarrow 0 \leq 2e^{1-\alpha} - 2 \Leftrightarrow$

$2 \leq 2e^{1-\alpha} \Leftrightarrow 1 \leq e^{1-\alpha} \Leftrightarrow e^0 \leq e^{1-\alpha} \Leftrightarrow 0 \leq 1 - \alpha \Leftrightarrow \alpha \leq 1$

που είναι άτοπο διότι $\alpha > 1$, άρα $x_1 < 1 < x_2$

Έστω ότι υπάρχει $x_0 \in (\alpha, x_2)$, τέτοιο ώστε $f(x_0) = f(1)$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[1, x_0]$, άρα από Θ.Rolle

υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, x_0)$, τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$

Άτοπο ($x_1 < 1 < \xi < x_0 < x_2$ και οι μοναδικές ρίζες της f' είναι τα x_1 και x_2).

Επομένως η εξίσωση $f(x) = f(1)$ είναι αδύνατη στο (α, x_2).

Δ3. 7^{ος} τρόπος

Από το Bolzano της 1^{ης} λύσης ή από τη 2^{η} λύση του Δ2

έχουμε δεδομένο ότι $x_1 < 1 < \alpha < x_2$.

Για κάθε $x \in (\alpha, x_2)$ είναι : $x_1 < 1 < \alpha < x < x_2 \overset{f\downarrow}{\Rightarrow} f(1) > f(\alpha) > f(x) > f(x_2)$

δηλαδή η εξίσωση $f(x) = f(1)$ είναι αδύνατη στο (α, x_2).

Δ3. 8^{ος} τρόπος

Από το Bolzano της 1^{ης} λύσης ή από τη 2^{η} λύση του Δ2

έχουμε δεδομένο ότι $x_1 < 1 < \alpha < x_2$.

Έστω ότι υπάρχει $x_0 \in (\alpha, x_2)$, τέτοιο ώστε $f(x_0) = f(1)$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[1, x_0]$, άρα από Θ.Rolle

υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, x_0)$, τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$

Άτοπο ($x_1 < 1 < \xi < x_0 < x_2$ και οι μοναδικές ρίζες της f' είναι τα x_1 και x_2).

Επομένως η εξίσωση $f(x) = f(1)$ είναι αδύνατη στο (α, x_2).

Δ3. ΠΡΟΣΟΧΗ! Οι λανθασμένες λύσεις που κυκλοφόρησαν στο διαδίκτυο

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο (α, x_2), άρα και 1-1

$f(x) = f(1) \overset{f\ 1\text{-}1}{\Leftrightarrow} x = 1$ η οποία απορρίπτεται διότι $1 \notin (\alpha, x_2)$ ή

Επομένως η εξίσωση $f(x) = f(1)$ είναι αδύνατη στο (α, x_2).

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο (α, x_2), άρα και 1-1

Είναι $1 \notin (\alpha, x_2)$, άρα για κάθε $x \in (\alpha, x_2)$ έχουμε :

$1 \neq x \overset{f\ 1\text{-}1}{\Leftrightarrow} f(1) \neq f(x)$,

Επομένως η εξίσωση $f(x) = f(1)$ είναι αδύνατη στο (α, x_2).

Το λάθος είναι το εξής : Για να εφαρμόσω τον ορισμό της 1-1 ή
την αντιθετοαντίστροφη πρόταση του ορισμού σε ένα διάστημα Δ
θα πρέπει τα x_1, x_2 να βρίσκονται στο διάστημα Δ.
Στις συγκεκριμένες λύσεις το 1 δεν ανήκει στο διάστημα (α, x_2).

Δ4. Για $\alpha = 2$ είναι :

$f(x) = 2e^{x-2} - x^2$ και

$f'(x) = 2e^{x-2} - 2x$

(ε) : εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(2, f(2))$

$(\varepsilon): y - f(2) = f'(2)\cdot(x-2) \Leftrightarrow (\varepsilon): y - (-2) = -2\cdot(x-2) \Leftrightarrow$

$(\varepsilon): y + 2 = -2x + 4 \Leftrightarrow (\varepsilon): y = -2x + 2$

Η f είναι κυρτή στο $[2, +\infty)$, άρα η C_f βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη (ε) με εξαίρεση το σημείο επαφής M,

δηλαδή για $x \geq 2$ είναι :

$$f(x) \geq -2x + 2 \overset{\sqrt{x-2}\geq 0}{\Leftrightarrow} f(x)\cdot\sqrt{x-2} \geq (-2x+2)\cdot\sqrt{x-2}$$

και το "=" ισχύει μόνο για $x = 2$, άρα

$$\int_2^3 f(x)\cdot\sqrt{x-2}\,dx > \int_2^3 \left[(-2x+2)\cdot\sqrt{x-2}\right] dx$$

Υπολογίζουμε το δεύτερο μέλος

Θέτω $\sqrt{x-2} = u$
Είναι $x - 2 = u^2 \Leftrightarrow$
$x = u^2 + 2$
$dx = 2u\,du$
- Για $x = 2$ είναι $u = 0$
- Για $x = 3$ είναι $u = 1$

$$\int_2^3 \left[(-2x+2)\cdot\sqrt{x-2}\right] dx = \int_0^1 \left[-2(u^2+2)+2)\right]\cdot u\cdot 2u\,du$$

$$= \int_0^1 (-2u^2 - 4 + 2)\cdot 2u^2\,du$$

$$= \int_0^1 (-2u^2 - 2)\cdot 2u^2\,du$$

$$= \int_0^1 (-4u^4 - 4u^2)\,du$$

$$= \left[-4\frac{u^5}{5} - 4\frac{u^3}{3}\right]_0^1$$

$$= -\frac{4}{5} - \frac{4}{3} = -\frac{12}{15} - \frac{20}{15} = -\frac{32}{15}$$

Επομένως $\int_2^3 f(x)\cdot\sqrt{x-2}\,dx > -\frac{32}{15}$.