

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ  
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ**

**ΣΑΒΒΑΤΟ 9 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2023**

**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ**

**ΘΕΜΑ Α**

- A1.** Έστω  $x_1, x_2 \in \Delta$  με  $x_1 < x_2$ . Θα δείξουμε ότι  $f(x_1) < f(x_2)$ .  
Η  $f$  ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο  $[x_1, x_2]$ ,  
άρα υπάρχει  $\xi \in (x_1, x_2)$  τέτοιο ώστε :
- $$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \Leftrightarrow f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi) \cdot (x_2 - x_1).$$
- Επειδή  $f'(\xi) > 0$  και  $x_2 - x_1 > 0$ , θα είναι  $f(x_2) - f(x_1) > 0$ ,  
οπότε  $f(x_1) < f(x_2)$ .

- A2.** Η ευθεία  $y = \ell$  λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της  $C_f$  στο  $+\infty$ ,  
αν  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \ell] = 0$ .

**A3. Θεώρημα Fermat**

Αν η συνάρτηση  $f$  είναι ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$ ,  
παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο  $x_0$  (εσωτερικό σημείο του  $\Delta$ )  
και η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$ , τότε  $f'(x_0) = 0$ .

- A4.** α. Σωστό  
β. Λάθος  
γ. Σωστό  
δ. Λάθος  
ε. Σωστό



**ΘΕΜΑ Β**

**B1.**  $D_g = D_h = (0, +\infty)$

$$D_f = D_{g \circ h} = \{x \in D_h \text{ και } h(x) \in D_g\} = \{x \in (0, +\infty) \text{ και } \ln x > 0\} \\ = \{x \in (0, +\infty) \text{ και } x > 1\} = (1, +\infty)$$

$$f(x) = (g \circ h)(x) = g(h(x)) = g(\ln x) = \frac{e^{\ln x} + 1}{e^{\ln x} - 1} = \frac{x + 1}{x - 1}$$

Επομένως  $f(x) = \frac{x + 1}{x - 1}, x > 1.$

**B2. 1<sup>ος</sup> τρόπος**

$$f'(x) = \left(\frac{x + 1}{x - 1}\right)' = \frac{(x + 1)' \cdot (x - 1) - (x + 1) \cdot (x - 1)'}{(x - 1)^2} = \frac{x - 1 - (x + 1)}{(x - 1)^2} \\ = \frac{x - 1 - x - 1}{(x - 1)^2} = \frac{-2}{(x - 1)^2}, x > 1$$

Είναι  $f'(x) < 0$ , για κάθε  $x > 1$ ,

άρα η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $(1, +\infty)$ ,

άρα η  $f$  είναι 1-1,

άρα  $f$  αντιστρέφεται.

**2<sup>ος</sup> τρόπος**

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \frac{x_1 + 1}{x_1 - 1} = \frac{x_2 + 1}{x_2 - 1} \Leftrightarrow$$

$$(x_1 + 1)(x_2 - 1) = (x_1 - 1)(x_2 + 1) \Leftrightarrow$$

$$\cancel{x_1 x_2} - x_1 + x_2 - 1 = \cancel{x_1 x_2} + x_1 - x_2 - 1 \Leftrightarrow$$

$$-2x_1 = -2x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2,$$

άρα η  $f$  είναι 1-1,

άρα  $f$  αντιστρέφεται.





### 3<sup>ος</sup> τρόπος

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1} = \frac{x-1+2}{x-1} = \frac{x-1}{x-1} + \frac{2}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1}, x > 1$$

$$x_1 > x_2 > 1 \Leftrightarrow x_1 - 1 > x_2 - 1 > 0 \Rightarrow \frac{1}{x_1 - 1} < \frac{1}{x_2 - 1} \Leftrightarrow$$

$$1 + \frac{1}{x_1 - 1} < 1 + \frac{1}{x_2 - 1} \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

άρα η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα,

άρα η  $f$  είναι 1-1,

άρα **η  $f$  αντιστρέφεται.**

**Εύρεση της αντίστροφης της  $f$**

### 1<sup>ος</sup> τρόπος (γνωρίζοντας ότι η $f$ είναι $\downarrow$ )

$$\left. \begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left[ (x+1) \cdot \frac{1}{x-1} \right] \stackrel{2^{(+\infty)}}{=} +\infty \\ \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(A) = (1, +\infty)$$

$$D_{f^{-1}} = f(A) = (1, +\infty) = D_f$$

Για  $x > 1, y > 1$  έχουμε :

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = \frac{x+1}{x-1} \Leftrightarrow yx - y = x + 1 \Leftrightarrow yx - x = y + 1 \Leftrightarrow$$

$$x \cdot (y - 1) = y + 1 \Leftrightarrow x = \frac{y+1}{y-1} \Leftrightarrow f^{-1}(y) = \frac{y+1}{y-1}, y > 1$$

$$\text{Επομένως } f^{-1}(x) = \frac{x+1}{x-1}, x > 1.$$

$$\text{Είναι } D_{f^{-1}} = D_f \text{ και } f(x) = f^{-1}(x) = \frac{x+1}{x-1}, \text{ για κάθε } x \in D_f$$

επομένως  **$f = f^{-1}$ .**





**2<sup>ος</sup> τρόπος** (χωρίς να γνωρίζουμε τη μονοτονία της  $f$ )

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = \frac{x+1}{x-1} \Leftrightarrow yx - y = x + 1 \Leftrightarrow yx - x = y + 1 \Leftrightarrow$$

$$x \cdot (y - 1) = y + 1 \stackrel{y \neq 1}{\Leftrightarrow} x = \frac{y+1}{y-1}$$

$\text{Πρέπει } x \in D_f \Leftrightarrow x > 1 \Leftrightarrow \frac{y+1}{y-1} > 1 \Leftrightarrow \frac{y+1}{y-1} - 1 > 0 \Leftrightarrow$ $\frac{y+1 - y + 1}{y-1} > 0 \Leftrightarrow \frac{2}{y-1} > 0 \Leftrightarrow y - 1 > 0 \Leftrightarrow y > 1$
--

Επομένως  $f^{-1}(y) = \frac{y+1}{y-1}, y > 1$  ή  $f^{-1}(x) = \frac{x+1}{x-1}, x > 1$ .

Είναι  $D_{f^{-1}} = D_f$  και  $f(x) = f^{-1}(x) = \frac{x+1}{x-1}$ , για κάθε  $x \in D_f$

επομένως  $\boxed{f = f^{-1}}$ .

**B3.** Από το B2 ερώτημα έχουμε :

- $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$ , άρα

$\eta C_f$  έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την  $x = 1$ .

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ , άρα

$\eta C_f$  έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο  $+\infty$  την  $y = 1$ .

**B4.**  $f(A) = (1, +\infty)$ , άρα  $f(x) > 1$ , για κάθε  $x > 1$ .

Ισχύει  $-1 \leq \text{συν}x \leq 1$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

Επομένως  $f(x) > 1 \geq \text{συν}x$ , για  $x > 1$ , δηλαδή

$\eta$  εξίσωση  $f(x) = \text{συν}x$  δεν έχει λύση στο διάστημα  $(1, +\infty)$ .



**ΘΕΜΑ Γ**

**Γ1. i)** Θεωρούμε συνάρτηση  $g$ , με  $g(x) = f(x) + x - 2$ ,  $x \in [1, 2]$ .

- $g$  συνεχής στο  $[1, 2]$  ως άθροισμα συνεχών
- $g(1) = f(1) + 1 - 2 = -1 < 0$  και  
 $g(2) = f(2) + 2 - 2 = 2 > 0$

από Θ. Bolzano

η εξίσωση  $g(x) = 0$  έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο  $(1, 2)$ , δηλαδή

**οι  $C_f$  και  $(\epsilon_1): y = -x + 2$  έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο.**

**ii)** Η εφαπτομένη της  $C_f$  στο σημείο με τετμημένη  $x_0 = 2$  έχει εξίσωση :

$$y - f(2) = f'(2) \cdot (x - 2) \Leftrightarrow y - 2 = 1 \cdot (x - 2) \Leftrightarrow y = x$$

επομένως **η  $C_f$  εφάπτεται στην ευθεία  $(\epsilon_2): y = x$ .**

**Γ2.** Είναι  $f''(x) < 0$ , για κάθε  $x \in [1, 2]$ , άρα η  $f'$  είναι γν. φθίνουσα στο  $[1, 2]$

$$1 \leq x \leq 2 \xrightarrow{f \downarrow} f'(x) \geq f'(2) \Leftrightarrow f'(x) \geq 1$$

Είναι  $f'(x) > 0$ , για κάθε  $x \in [1, 2]$ , άρα η  $f$  είναι γν. αύξουσα στο  $[1, 2]$ ,

άρα η  $f$  είναι 1-1, άρα **η  $f$  αντιστρέφεται.**

$$D_{f^{-1}} = f([1, 2]) \xrightarrow{f \uparrow} [f(1), f(2)], \text{ άρα } D_{f^{-1}} = [0, 2].$$

**Γ3.** Έστω  $1 < x < 2$ .

Η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στα  $[1, x]$  και  $[x, 2]$ ,

άρα από Θ.Μ.Τ. υπάρχουν :

$$x_1 \in (1, x), \text{ τέτοιο ώστε } f'(x_1) = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \Leftrightarrow f'(x_1) = \frac{f(x)}{x - 1} \quad (1)$$

$$x_2 \in (x, 2), \text{ τέτοιο ώστε } f'(x_2) = \frac{f(2) - f(x)}{2 - x} \Leftrightarrow f'(x_2) = \frac{2 - f(x)}{2 - x} \quad (2)$$

$$x_1 < x_2 \xrightarrow{f \downarrow} f'(x_1) > f'(x_2) \begin{matrix} (1) \\ \Leftrightarrow \\ (2) \end{matrix} \boxed{\frac{f(x)}{x - 1} > \frac{2 - f(x)}{2 - x}}$$



**Γ4.ι.** Θα δείξουμε ότι  $f(x) \geq 2x - 2$ , για κάθε  $x \in [1, 2]$ .

▷ Για  $x = 1$  ή  $x = 2$  ισχύει το "=", αφού  $f(1) = 0$  και  $f(2) = 2$ .

▷ Για  $x \in (1, 2)$  από το Γ3 ερώτημα έχουμε :

$$\frac{f(x)}{x-1} > \frac{2-f(x)}{2-x} \quad \begin{array}{l} x-1 > 0 \\ 2-x > 0 \end{array} \Leftrightarrow (2-x) \cdot f(x) > [2-f(x)] \cdot (x-1) \Leftrightarrow$$

$$2f(x) - \cancel{x \cdot f(x)} > 2x - 2 - \cancel{x \cdot f(x)} + f(x) \Leftrightarrow f(x) > 2x - 2$$

Επομένως  $f(x) \geq 2x - 2$ , για κάθε  $x \in [1, 2]$

**ii.**  $f(x) \geq 2x - 2$ , για κάθε  $x \in [1, 2]$  και το "=" ισχύει μόνο για  $x = 1$  ή  $2$ .

Επομένως  $\int_1^2 f(x) dx > \int_1^2 (2x - 2) dx \Leftrightarrow$

$$\int_1^2 f(x) dx > [x^2 - 2x]_1^2 \Leftrightarrow$$

$$\int_1^2 f(x) dx > 0 - (-1) \Leftrightarrow \int_1^2 f(x) dx > 1 \quad (3)$$

Η  $f'$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $[1, 2]$ ,

άρα η  $f$  είναι κοίλη στο  $[1, 2]$ ,

άρα η  $C_f$  βρίσκεται κάτω από την εφαπτομένη της  $(\varepsilon_2) : y = x$ ,

με εξαίρεση το σημείο επαφής  $A(2, 2)$ , άρα

$f(x) \leq x$ , για κάθε  $x \in [1, 2]$  και το "=" ισχύει μόνο για  $x = 2$ .

Επομένως  $\int_1^2 f(x) dx < \int_1^2 x dx \Leftrightarrow$

$$\int_1^2 f(x) dx < \left[ \frac{x^2}{2} \right]_1^2 \Leftrightarrow$$

$$\int_1^2 f(x) dx < \frac{4}{2} - \frac{1}{2} \Leftrightarrow \int_1^2 f(x) dx < \frac{3}{2} \quad (4)$$

Από (3) και (4) έχουμε :

$$1 < \int_1^2 f(x) dx < \frac{3}{2}$$



**ΘΕΜΑ Δ**

**Δ1.** Για  $x > 0$  είναι  $f'(x) = (e^x)' = e^x$

$$(\varepsilon) : y - f(x_1) = f'(x_1) \cdot (x - x_1) \Leftrightarrow (\varepsilon) : y - e^{x_1} = e^{x_1} \cdot (x - x_1)$$

$$O(0, 0) \in (\varepsilon) \Leftrightarrow 0 - e^{x_1} = e^{x_1} \cdot (0 - x_1) \Leftrightarrow -e^{x_1} = -x_1 \cdot e^{x_1} \Leftrightarrow x_1 = 1$$

$$(\varepsilon) : y - f(1) = f'(1) \cdot (x - 1) \Leftrightarrow (\varepsilon) : y - e = e \cdot (x - 1) \Leftrightarrow \boxed{(\varepsilon) : y = e \cdot x}$$

**Δ2.** • Για  $x > 0$ , είναι  $f''(x) = (e^x)' = e^x > 0$ ,

άρα η  $f$  είναι κυρτή στο  $(0, +\infty)$  και η  $C_f$  βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη της  $(\varepsilon)$ , με εξαίρεση το σημείο επαφής  $A(x_1, f(x_1))$ .

• Για  $x = 0$ , είναι  $f(0) = 1$  και  $\Gamma(0, 1) \notin (\varepsilon)$

• Για  $x < 0$ , θα δείξουμε ότι η εξίσωση  $f(x) = e \cdot x$  έχει ακριβώς μια ρίζα.

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $g$ , με  $g(x) = f(x) - e \cdot x, x < 0$ .

$$g'(x) = (-e^{-x} + 2 - e \cdot x)' = e^{-x} - e, x < 0$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-x} - e = 0 \Leftrightarrow e^{-x} = e \Leftrightarrow -x = 1 \Leftrightarrow x = -1$$

$$g'(x) > 0 \Leftrightarrow e^{-x} - e > 0 \Leftrightarrow e^{-x} > e \Leftrightarrow -x > 1 \Leftrightarrow x < -1$$

$x$	$-\infty$	$-1$	$0$
$g'(x)$	+	○	-
$g(x)$	↗		↘

▷  $\Delta_1 = (-\infty, -1]$  : Η  $g$  συνεχής και γνησίως αύξουσα στο  $\Delta_1$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-e^{-x} + 2 - ex) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ e^{-x} \cdot \left( -1 + \frac{2 - ex}{e^{-x}} \right) \right] = -\infty$$

διότι  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$  και  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 - ex}{e^{-x}} \stackrel{\left( \frac{+\infty}{+\infty} \right)}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-e}{-e^{-x}} \stackrel{DL'H}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-e}{-e^{-x}} = 0$ ,

άρα  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( -1 + \frac{2 - ex}{e^{-x}} \right) = -1 < 0$

•  $g(-1) = 2$

Είναι  $g(\Delta_1) = (-\infty, 2]$  και  $0 \in g(\Delta_1)$ ,

άρα υπάρχει μοναδικό  $x_0 \in \Delta_1$ , τέτοιο ώστε  $g(x_0) = 0$ .



▷  $\Delta_2 = (-1, 0)$ : Η  $g$  συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο  $\Delta_2$

$$\left. \begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow -1^+} g(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^+} (-e^{-x} + 2 - ex) = 2 \\ \bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} (-e^{-x} + 2 - ex) = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow g(\Delta_2) = (1, 2)$$

$0 \notin g(\Delta_2)$ , άρα η εξίσωση  $g(x) = 0$  είναι αδύνατη στο  $\Delta_2$ .

Συμπερασματικά

η  $C_f$  και η ευθεία  $(\varepsilon)$  έχουν εκτός από το σημείο  $A(1, \varepsilon)$  ένα ακριβώς ακόμη κοινό σημείο  $B(x_0, f(x_0))$ , με  $x_0 < -1$ .

**Δ3.** Θεωρούμε τη συνάρτηση  $h$ , με  $h(x) = f(x) - e \cdot x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

Η  $h$  είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$ , ως διαφορά συνεχών και έχει μοναδικές ρίζες τις  $x_1 = 1$  και  $x_0$  όπως βρήκαμε στο Δ2.

Από συνέπειες Θ. Bolzano, η  $h$  διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα  $(x_0, 1)$  και επειδή  $x_0 < 0 < 1$  με  $h(0) = f(0) = 1 > 0$  θα είναι  $h(x) > 0$ , για κάθε  $x \in (x_0, 1)$ .

Είναι  $h(x) \geq 0$  στο διάστημα  $[x_0, 1]$ , άρα

$$E = \int_{x_0}^1 h(x) dx = \int_{x_0}^1 [f(x) - ex] dx = \int_{x_0}^1 f(x) dx - \int_{x_0}^1 ex dx$$

$$= \int_{x_0}^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx - \left[ \frac{e \cdot x^2}{2} \right]_{x_0}^1$$

$$= \int_{x_0}^0 (-e^{-x} + 2) dx + \int_0^1 e^x dx - \left( \frac{e}{2} - \frac{e \cdot x_0^2}{2} \right)$$

$$= [e^{-x} + 2x]_{x_0}^0 + [e^x]_0^1 - \frac{e}{2} + \frac{e \cdot x_0^2}{2}$$

$$= 1 - e^{-x_0} - 2x_0 + e - 1 - \frac{e}{2} + \frac{e \cdot x_0^2}{2}$$

$$= \left( \frac{e \cdot x_0^2}{2} - 2x_0 - e^{-x_0} + \frac{e}{2} \right) \text{τ.μ.}$$

$$\begin{aligned} h(x_0) = 0 &\Leftrightarrow \\ -e^{-x_0} + 2 - ex_0 &= 0 \Leftrightarrow \\ -e^{-x_0} &= ex_0 - 2 \end{aligned}$$

$$\text{ή } E \stackrel{(3)}{=} \frac{e \cdot x_0^2}{2} - 2x_0 + ex_0 - 2 + \frac{e}{2} = \left( \frac{e \cdot x_0^2}{2} + (e-2) \cdot x_0 + \frac{e-4}{2} \right) \text{τ.μ.}$$





**Δ4.** Το κινητό1 κινείται στη  $C_f$  και  $\Delta(x_2, f(x_2))$  είναι μία τυχαία του θέση.

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -e^{-x} + 2 = 0 \Leftrightarrow e^{-x} = 2 \Leftrightarrow -x = \ln 2 \Leftrightarrow x = -\ln 2$$

Η  $C_f$  τέμνει τον άξονα  $x'x$  στο σημείο  $Z(-\ln 2, 0)$ , άρα  $x_2 \in [x_0, -\ln 2]$

Το κινητό2 κινείται κατά μήκος της ευθείας ( $\epsilon$ ), από το  $B$  στο  $O$  και

$E(x_3, ex_3)$  είναι η αντίστοιχη θέση του, με  $x_3 \in [x_0, 0]$ .

Οι τεταγμένες των  $\Delta, E$  είναι ίσες, άρα  $f(x_2) = ex_3 \Leftrightarrow -e^{-x_2} + 2 = ex_3$

### 1<sup>ος</sup> τρόπος

$$-e^{-x_2} + 2 = ex_3 \Leftrightarrow x_3 = \frac{2 - e^{-x_2}}{e} \Leftrightarrow x_3 = \frac{2}{e} - e^{-1-x_2}$$

Άρα η οριζόντια απόστασή τους  $(\Delta E) = |x_3 - x_2| = \frac{2}{e} - e^{-1-x_2} - x_2$

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $d$ , με  $d(x) = \frac{2}{e} - e^{-1-x} - x, x \in [x_0, -\ln 2]$ .

$$d'(x) = \left( \frac{2}{e} - e^{-1-x} - x \right)' = e^{-1-x} - 1, x \in [x_0, 0].$$

$$d'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-1-x} - 1 = 0 \Leftrightarrow e^{-1-x} = 1 \Leftrightarrow -1 - x = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

$$d'(x) > 0 \Leftrightarrow e^{-1-x} - 1 > 0 \Leftrightarrow e^{-1-x} > 1 \Leftrightarrow -1 - x > 0 \Leftrightarrow x < -1$$

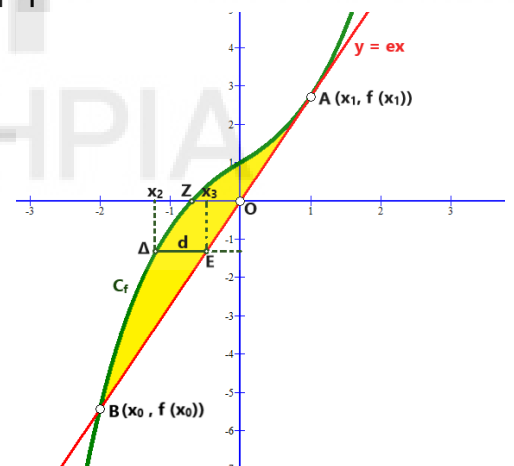
$x$	$x_0$		$-1$		$-\ln 2$
$d'(x)$			+	○	-
$d(x)$		↗			↘

Η  $d$  παρουσιάζει μέγιστο για  $x = -1$  την τιμή

$$d(-1) = -e^0 + \frac{2}{e} - (-1) = -1 + \frac{2}{e} + 1 = \frac{2}{e}$$

Επομένως

η μέγιστη απόσταση των δύο κινητών κατά τη διάρκεια της κίνησής τους είναι  $\frac{2}{e}$  μονάδες.



**2<sup>ος</sup> τρόπος**

$$-e^{-x_2} + 2 = ex_3 \Leftrightarrow e^{-x_2} = 2 - ex_3 \Leftrightarrow$$

$$-x_2 = \ln(2 - ex_3) \Leftrightarrow x_2 = -\ln(2 - ex_3)$$

Άρα η οριζόντια απόστασή τους  $(\Delta E) = |x_3 - x_2| = x_3 + \ln(2 - ex_3)$

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $d$ , με  $d(x) = x + \ln(2 - ex)$ ,  $x \in [x_0, 0]$ .

$$d'(x) = (x + \ln(2 - ex))' = 1 + \frac{-e}{2 - ex} = \frac{2 - ex - e}{2 - ex}, \quad x \in [x_0, 0].$$

$$d'(x) = 0 \Leftrightarrow 2 - ex - e = 0 \Leftrightarrow ex = 2 - e \Leftrightarrow x = \frac{2 - e}{e}$$

$$d'(x) > 0 \stackrel{2 - ex > 0}{\Leftrightarrow} 2 - ex - e > 0 \Leftrightarrow ex < 2 - e \Leftrightarrow x < \frac{2 - e}{e}$$

$x$	$x_0$	$\frac{2 - e}{e}$	$0$
$d'(x)$		+	-
$d(x)$		↗	↘

Η  $d$  παρουσιάζει μέγιστο για  $x = \frac{2 - e}{e}$  την τιμή

$$\begin{aligned} d\left(\frac{2 - e}{e}\right) &= \frac{2 - e}{e} + \ln\left(2 - e \frac{2 - e}{e}\right) = \frac{2 - e}{e} + \ln e \\ &= \frac{2 - e}{e} + 1 = \frac{2 - e + e}{e} = \frac{2}{e} \end{aligned}$$

Επομένως

η μέγιστη απόσταση των δύο κινητών κατά τη διάρκεια της κίνησής τους είναι  $\frac{2}{e}$  μονάδες.

