ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 15 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2023

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Για να δείξουμε ότι η f είναι συνεχής στο σημείο x_0, αρκεί να δείξουμε ότι $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ ή $\lim_{x\to x_0} [f(x) - f(x_0)] = 0$.

Για $x \neq x_0$ έχουμε :

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\cdot(x - x_0), \text{ οπότε}$$

$$\lim_{x\to x_0} [f(x) - f(x_0)] = \lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\cdot(x - x_0)\right]$$

$$= \lim_{x\to x_0}\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\cdot\lim_{x\to x_0}(x - x_0) = f'(x_0)\cdot 0 = 0$$

αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0.
Επομένως $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ δηλαδή η f είναι συνεχής στο x_0.

Α2. Θεώρημα Bolzano

Έστω μια συνάρτηση f , ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha , \beta]$.
Αν:

- η f είναι συνεχής στο $[\alpha , \beta]$ και, επιπλέον, ισχύει
- $f(\alpha)\cdot f(\beta) < 0$,

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0 \in (\alpha , \beta)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$, δηλαδή, υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο ανοικτό διάστημα (α , β).

Α3. Οι συναρτήσεις f, g λέγονται ίσες συναρτήσεις, όταν έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού Α και $f(x) = g(x)$, για κάθε $x \in A$.

Α4. α. Σωστό, **β.** Σωστό, **γ.** Λάθος, **δ.** Σωστό, **ε.** Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β1. Για $x>0: f'(x)=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)'=1-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{x^2-1}{x^2}$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{x^2-1}{x^2}=0 \Leftrightarrow x^2-1=0 \Leftrightarrow x^2=1 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x=1$$

$$f'(x)>0 \Leftrightarrow \frac{x^2-1}{x^2}>0 \Leftrightarrow x^2-1>0 \Leftrightarrow x^2>1 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x>1$$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘		↗	

Η f είναι γν. φθίνουσα στο $(0,1]$ και γν. αύξουσα στο $[1,+\infty)$.
Η f παρουσιάζει ελάχιστο για $x=1$ την τιμή $f(1)=2$.

Β2. Για $x>0: f''(x)=\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)'=-(x^{-2})'=2x^{-3}=\dfrac{2}{x^3}>0$

Η f είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$ και δεν έχει σημεία καμπής.

Β3. ◦ Η f είναι συνεχής στο $\left[\dfrac{2}{3},\dfrac{3}{2}\right]$ ως παραγωγίσιμη

◦ Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{3}{2}\right)$

◦ $f\left(\dfrac{2}{3}\right)=f\left(\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{2}{3}+\dfrac{3}{2}=\dfrac{13}{6}$

άρα **ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θ. Rolle για την f στο διάστημα $\left[\dfrac{2}{3},\dfrac{3}{2}\right]$**

Β4. Είναι $f(x)>0$ για κάθε $x\in[1,e]$, άρα

$$E=\int_1^e f(x)\,dx=\int_1^e\left(x+\frac{1}{x}\right)dx=\left[\frac{x^2}{2}+\ell n x\right]_1^e=\frac{e^2}{2}+1-\frac{1}{2}=\mathbf{\frac{1+e^2}{2}}\ \textbf{τ.μ.}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $x_A = x_B = \alpha$, άρα $B\,(\alpha\,,\,y_B)$

$B\,(\alpha\,,\,y_B) \in C_f \;\Leftrightarrow\; y_B = f\,(\alpha) \;\Leftrightarrow\; y_B = e^{-\alpha}$, άρα $B\,(\alpha\,,\,e^{-\alpha})$

$y_\Gamma = y_B = e^{-\alpha}$, άρα $\Gamma\,(x_\Gamma\,,\,e^{-\alpha})$

$\Gamma\,(x_\Gamma\,,\,e^{-\alpha}) \in C_g \;\Leftrightarrow\; e^{-\alpha} = g\,(x_\Gamma) \;\Leftrightarrow\; e^{-\alpha} = -\dfrac{e}{x_\Gamma} \;\Leftrightarrow\; \dfrac{1}{e^{\alpha}} = -\dfrac{e}{x_\Gamma} \;\Leftrightarrow$

$x_\Gamma = -e \cdot e^{\alpha} \;\Leftrightarrow\; x_\Gamma = -e^{1+\alpha}$, άρα $\mathbf{\Gamma\,(-e^{1+\alpha}\,,\,e^{-\alpha})}$

Γ2. $E_{AB\Gamma\Delta} = (A\Delta)\cdot(AB) \;\Leftrightarrow\; E_{AB\Gamma\Delta} = (x_A - x_\Delta)\cdot(y_B - y_A) \;\Rightarrow$

$E\,(\alpha) = (\alpha + e^{1+\alpha})\cdot(e^{-\alpha} - 0) \;\Leftrightarrow\; E\,(\alpha) = \alpha\cdot e^{-\alpha} + e^{1+\alpha-\alpha} \;\Leftrightarrow$

$\mathbf{E\,(\alpha) = \alpha\cdot e^{-\alpha} + e}$, $\alpha > -1$.

Γ3. Για $\alpha > -1$: $E'(\alpha) = (\alpha\cdot e^{-\alpha} + e)' = e^{-\alpha} - \alpha\cdot e^{-\alpha} = (1-\alpha)\cdot e^{-\alpha}$

$E'(\alpha) = 0 \;\Leftrightarrow\; (1-\alpha)\cdot e^{-\alpha} = 0 \;\Leftrightarrow\; 1-\alpha = 0 \;\Leftrightarrow\; \alpha = 1$

$E'(\alpha) > 0 \;\Leftrightarrow\; (1-\alpha)\cdot e^{-\alpha} > 0 \;\overset{e^{-\alpha}>0}{\Leftrightarrow}\; 1-\alpha > 0 \;\overset{\alpha>-1}{\Leftrightarrow}\; -1 < \alpha < 1$

α	-1		1		$+\infty$
$E'(\alpha)$		$+$	0	$-$	
$E\,(\alpha)$		$\nearrow$		$\searrow$	

Το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ μεγιστοποιείται όταν $\alpha = 1$, δηλαδή όταν Α (1 , 0).

Γ4. $E_{max} = E\,(1) = e + e^{-1} = e + \dfrac{1}{e} < 4$, αφού $e \cong 2{,}718$

Επομένως **δεν υπάρχει θέση του σημείου Α,**
ώστε το ορθογώνιο ΑΒΓΔ να έχει εμβαδόν 4 τ.μ.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. • Για $x \neq 0$: θέτουμε $\frac{1}{x} = u \Leftrightarrow x = \frac{1}{u},\ u \neq 0$

$$x^2 \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) = \eta\mu x \Rightarrow \left(\frac{1}{u}\right)^2 \cdot f(u) = \eta\mu\frac{1}{u} \Leftrightarrow \frac{f(u)}{u^2} = \eta\mu\frac{1}{u} \Leftrightarrow$$

$$f(u) = u^2 \cdot \eta\mu\frac{1}{u},\ u \neq 0 \quad \text{ή} \quad f(x) = x^2 \cdot \eta\mu\frac{1}{x},\ x \neq 0$$

• Η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, άρα $f(0) = \lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

$$\left.\begin{array}{l} \left|x^2 \cdot \eta\mu\frac{1}{x}\right| \leq |x^2| = x^2 \Leftrightarrow -x^2 \leq x^2 \cdot \eta\mu\frac{1}{x} \leq x^2 \\ \lim\limits_{x\to 0}(-x^2) = \lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

από κριτήριο παρεμβολής $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$, άρα $f(0) = 0$

Επομένως $\mathbf{f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \eta\mu\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}}$

Δ2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2 \cdot \eta\mu\frac{1}{x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\left(x \cdot \eta\mu\frac{1}{x}\right)$

$$\left.\begin{array}{l} \bullet \left|x \cdot \eta\mu\frac{1}{x}\right| \leq |x| \Leftrightarrow -|x| \leq x \cdot \eta\mu\frac{1}{x} \leq |x| \\ \bullet \lim\limits_{x\to 0}(-|x|) = \lim\limits_{x\to 0}|x| = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

από κριτήριο παρεμβολής $\lim\limits_{x\to 0}\left(x \cdot \eta\mu\frac{1}{x}\right) = 0$

άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$, με $f'(0) = 0$

$(\varepsilon): y - f(0) = f'(0)\cdot(x - 0) \Leftrightarrow$

$(\varepsilon): y = 0$ $(x'x)$

Δ3. $$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\cdot \eta\mu\frac{1}{x}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(x\cdot\eta\mu\frac{1}{x}\right) \underset{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0}{\overset{\frac{1}{x}=u \Leftrightarrow x=\frac{1}{u}}{=}} \lim_{u\to 0}\frac{\eta\mu u}{u} = 1 = \lambda$$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-\lambda x] = \lim_{x\to+\infty}\left(x^2\cdot\eta\mu\frac{1}{x} - x\right) \underset{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0}{\overset{\frac{1}{x}=u \Leftrightarrow x=\frac{1}{u}}{=}} \lim_{u\to 0}\left(\frac{\eta\mu u}{u^2} - \frac{1}{u}\right)$$

$$= \lim_{u\to 0}\frac{\eta\mu u - u}{u^2} \underset{DL'H}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim_{u\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu u - 1}{2u} \underset{DL'H}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim_{u\to 0}\frac{\eta\mu u}{2} = 0 = \beta$$

άρα η C_f **έχει πλάγια ασύμπτωτη στο +∞, την ευθεία $y = x$.**

Δ4. Θεωρούμε τη συνάρτηση g, με $g(x) = f(x)\cdot\sigma\upsilon\nu x$, $x \in [-1\ ,\ 1]$

- ▷ $g(0) = f(0)\cdot\sigma\upsilon\nu 0 = 0\cdot 1 = 0 = -g(0)$
- ▷ Για $x \in [-1\ ,\ 0)\cup(0\ ,\ 1]$:

$$g(-x) = f(-x)\cdot\sigma\upsilon\nu(-x) = (-x)^2\cdot\eta\mu\frac{1}{-x}\cdot\sigma\upsilon\nu x = x^2\cdot\left(-\eta\mu\frac{1}{x}\right)\cdot\sigma\upsilon\nu x$$

$$= -x^2\cdot\eta\mu\frac{1}{x}\cdot\sigma\upsilon\nu x = -f(x)\cdot\sigma\upsilon\nu x = -g(x)$$

Επομένως $g(-x) = -g(x)$, για κάθε $x \in [-1\ ,\ 1]$

$$I = \int_{-1}^{1} g(x)\,dx$$
$$= \int_{1}^{-1} g(-u)\,(-du)$$
$$= -\int_{1}^{-1} -g(u)\,du$$
$$= \int_{1}^{-1} g(u)\,du$$
$$= -\int_{-1}^{1} g(u)\,du$$

Θέτω $x = -u$

$dx = -du$

x	-1	1
u	1	-1

Είναι $I = -I \Leftrightarrow 2I = 0 \Leftrightarrow$ $\mathbf{I = 0}$