



**ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ
& ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ ΠΟΥ ΥΠΗΡΕΤΟΥΝ ΣΤΟ
ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ**

ΣΑΒΒΑΤΟ 9 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2023

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Έστω $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$. Θα δείξουμε ότι $f(x_1) < f(x_2)$.
Η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο $[x_1, x_2]$,
άρα υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε :

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \Leftrightarrow f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi) \cdot (x_2 - x_1).$$

Επειδή $f'(\xi) > 0$ και $x_2 - x_1 > 0$, θα είναι $f(x_2) - f(x_1) > 0$,
οπότε $f(x_1) < f(x_2)$.

- A2.** Η ευθεία $y = \ell$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$,
αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \ell] = 0$.

A3. Θεώρημα Fermat

Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη σε ένα διάστημα Δ ,
παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 (εσωτερικό σημείο του Δ)
και η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε $f'(x_0) = 0$.

- A4.** α. Σωστό
β. Λάθος
γ. Σωστό
δ. Λάθος
ε. Σωστό



ΘΕΜΑ Β

B1. $f'(x) = (x^3 - 3x^2 + 2)' = 3x^2 - 6x = 3x \cdot (x - 2), x \in \mathbb{R}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x \cdot (x - 2) = 0 \Leftrightarrow 3x = 0 \text{ ή } x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = 2$

| | | | | | |
|-------|-----------|---|---|-----------|---|
| x | $-\infty$ | 0 | 2 | $+\infty$ | |
| f'(x) | + | ○ | - | ○ | + |
| f(x) | ↗ | | ↘ | | ↗ |

Η f είναι γνησίως αύξουσα στα $(-\infty, 0]$ και $[2, +\infty)$, ενώ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, 2]$.

Παρουσιάζει τοπικό μέγιστο για $x = 0$, την τιμή $f(0) = 2$ και τοπικό ελάχιστο για $x = 2$ την τιμή $f(2) = -2$.

B2. $f''(x) = (3x^2 - 6x)' = 6x - 6, x \in \mathbb{R}$

| | | | |
|--------|-----------|---|-----------|
| x | $-\infty$ | 1 | $+\infty$ |
| f''(x) | - | ○ | + |
| f(x) | ↻ | | ↻ |

Η f είναι κοίλη στο $(-\infty, 1]$ και κυρτή στο $[1, +\infty)$.

Είναι $f(1) = 0$, άρα η C_f έχει σημείο καμπής το $A(1, 0)$.

B3. $I = \int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 (x^3 - 3x^2 + 2) dx = \left[\frac{x^4}{4} - x^3 + 2x \right]_1^2$
 $= \cancel{4} - \cancel{8} + \cancel{4} - \left(\frac{1}{4} - 1 + 2 \right) = -\frac{1}{4} - 1 = \boxed{-\frac{5}{4}}$

B4. Θεωρούμε συνάρτηση g, με $g(x) = f(x) - e^x, x \in [0, 1]$.

• g συνεχής στο $[0, 1]$, ως διαφορά συνεχών

• $g(0) = f(0) - e^0 = 2 - 1 = 1 > 0$

$g(1) = f(1) - e^1 = 0 - e = -e < 0$

από Θ. Bolzano υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα της $g(x) = 0$, στο $(0, 1)$

δηλαδή $\boxed{\text{η εξίσωση } f(x) = e^x \text{ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο } (0, 1)}$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $D_g = D_h = (0, +\infty)$

$$D_f = D_{g \circ h} = \{x \in D_h \text{ και } h(x) \in D_g\} = \{x \in (0, +\infty) \text{ και } \ln x > 0\}$$

$$= \{x \in (0, +\infty) \text{ και } x > 1\} = (1, +\infty)$$

$$f(x) = (g \circ h)(x) = g(h(x)) = g(\ln x) = \frac{e^{\ln x} + 1}{e^{\ln x} - 1} = \frac{x + 1}{x - 1}$$

Επομένως $f(x) = \frac{x + 1}{x - 1}, x > 1.$

Γ2. 1^{ος} τρόπος

$$f'(x) = \left(\frac{x + 1}{x - 1}\right)' = \frac{(x + 1)' \cdot (x - 1) - (x + 1) \cdot (x - 1)'}{(x - 1)^2} = \frac{x - 1 - (x + 1)}{(x - 1)^2}$$

$$= \frac{x - 1 - x - 1}{(x - 1)^2} = \frac{-2}{(x - 1)^2}, x > 1$$

Είναι $f'(x) < 0$, για κάθε $x > 1$,

άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(1, +\infty)$,

άρα η f είναι 1-1,

άρα f αντιστρέφεται.

2^{ος} τρόπος

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \frac{x_1 + 1}{x_1 - 1} = \frac{x_2 + 1}{x_2 - 1} \Leftrightarrow$$

$$(x_1 + 1)(x_2 - 1) = (x_1 - 1)(x_2 + 1) \Leftrightarrow$$

$$\cancel{x_1 x_2} - x_1 + x_2 - 1 = \cancel{x_1 x_2} + x_1 - x_2 - 1 \Leftrightarrow$$

$$-2x_1 = -2x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2,$$

άρα η f είναι 1-1,

άρα f αντιστρέφεται.



3^{ος} τρόπος

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1} = \frac{x-1+2}{x-1} = \frac{x-1}{x-1} + \frac{2}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1}, x > 1$$

$$x_1 > x_2 > 1 \Leftrightarrow x_1 - 1 > x_2 - 1 > 0 \Rightarrow \frac{1}{x_1 - 1} < \frac{1}{x_2 - 1} \Leftrightarrow$$

$$1 + \frac{1}{x_1 - 1} < 1 + \frac{1}{x_2 - 1} \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα,

άρα η f είναι 1-1,

άρα **η f αντιστρέφεται.**

Εύρεση της αντίστροφης της f

1^{ος} τρόπος (γνωρίζοντας ότι η f είναι \downarrow)

$$\left. \begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left[(x+1) \cdot \frac{1}{x-1} \right] \stackrel{2^{(+\infty)}}{=} +\infty \\ \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(A) = (1, +\infty)$$

$$D_{f^{-1}} = f(A) = (1, +\infty) = D_f$$

Για $x > 1, y > 1$ έχουμε :

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = \frac{x+1}{x-1} \Leftrightarrow yx - y = x + 1 \Leftrightarrow yx - x = y + 1 \Leftrightarrow$$

$$x \cdot (y - 1) = y + 1 \Leftrightarrow x = \frac{y+1}{y-1} \Leftrightarrow f^{-1}(y) = \frac{y+1}{y-1}, y > 1$$

$$\text{Επομένως } f^{-1}(x) = \frac{x+1}{x-1}, x > 1.$$

$$\text{Είναι } D_{f^{-1}} = D_f \text{ και } f(x) = f^{-1}(x) = \frac{x+1}{x-1}, \text{ για κάθε } x \in D_f$$

επομένως **$f = f^{-1}$.**





2^{ος} τρόπος (χωρίς να γνωρίζουμε τη μονοτονία της f)

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = \frac{x+1}{x-1} \Leftrightarrow yx - y = x + 1 \Leftrightarrow yx - x = y + 1 \Leftrightarrow$$

$$x \cdot (y - 1) = y + 1 \stackrel{y \neq 1}{\Leftrightarrow} x = \frac{y+1}{y-1}$$

| |
|---|
| $\begin{aligned} \text{Πρέπει } x \in D_f &\Leftrightarrow x > 1 \Leftrightarrow \frac{y+1}{y-1} > 1 \Leftrightarrow \frac{y+1}{y-1} - 1 > 0 \Leftrightarrow \\ \frac{y+1 - y + 1}{y-1} > 0 &\Leftrightarrow \frac{2}{y-1} > 0 \Leftrightarrow y - 1 > 0 \Leftrightarrow y > 1 \end{aligned}$ |
|---|

Επομένως $f^{-1}(y) = \frac{y+1}{y-1}, y > 1$ ή $f^{-1}(x) = \frac{x+1}{x-1}, x > 1$.

Είναι $D_{f^{-1}} = D_f$ και $f(x) = f^{-1}(x) = \frac{x+1}{x-1}$, για κάθε $x \in D_f$

επομένως $\boxed{f = f^{-1}}$.

Γ3. Από το Γ2 ερώτημα έχουμε :

- $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$, άρα

ηC_f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την $x = 1$.

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$, άρα

ηC_f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την $y = 1$.

Γ4. $f(A) = (1, +\infty)$, άρα $f(x) > 1$, για κάθε $x > 1$.

Ισχύει $-1 \leq \sin x \leq 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Επομένως $f(x) > 1 \geq \sin x$, για $x > 1$, δηλαδή

η εξίσωση $f(x) = \sin x$ δεν έχει λύση στο διάστημα $(1, +\infty)$.



ΘΕΜΑ Δ

Δ1. i) Θεωρούμε συνάρτηση g , με $g(x) = f(x) + x - 2$, $x \in [1, 2]$.

• g συνεχής στο $[1, 2]$ ως άθροισμα συνεχών

• $g(1) = f(1) + 1 - 2 = -1 < 0$ και

$g(2) = f(2) + 2 - 2 = 2 > 0$

από Θ. Bolzano

η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(1, 2)$,
δηλαδή

οι C_f και $(\varepsilon_1): y = -x + 2$ έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο.

ii) (ε) : η εφαπτομένη της C_f στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 2$

$$(\varepsilon): y - f(2) = f'(2) \cdot (x - 2) \Leftrightarrow$$

$$(\varepsilon): y - 2 = 1 \cdot (x - 2) \Leftrightarrow$$

$$(\varepsilon): y = x$$

επομένως **η C_f εφάπτεται στην ευθεία $(\varepsilon_2): y = x$.**

Δ2. Είναι $f''(x) < 0$, για κάθε $x \in [1, 2]$,

άρα η f' είναι γν. φθίνουσα στο $[1, 2]$

$$1 \leq x \leq 2 \stackrel{f \downarrow}{\Rightarrow} f'(x) \geq f'(2) \Leftrightarrow f'(x) \geq 1$$

Είναι $f'(x) > 0$, για κάθε $x \in [1, 2]$,

άρα η f είναι γν. αύξουσα στο $[1, 2]$,

άρα η f είναι 1-1, άρα **η f αντιστρέφεται.**

$$D_{f^{-1}} = f^{-1}([1, 2]) = [f(1), f(2)], \text{ άρα } \mathbf{D_{f^{-1}} = [0, 2]}.$$

Δ3. Για κάθε $x \in (1, 2)$ έχουμε :

- f είναι συνεχής στο $[1, x]$
- f είναι παραγωγίσιμη στο $(1, x)$

άρα από Θ.Μ.Τ. υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_1 \in (1, x)$, τέτοιο ώστε

$$f'(x_1) = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \Leftrightarrow f'(x_1) = \frac{f(x)}{x - 1} \quad (1)$$

- f είναι συνεχής στο $[x, 2]$
- f είναι παραγωγίσιμη στο $(x, 2)$

άρα από Θ.Μ.Τ. υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_2 \in (x, 2)$, τέτοιο ώστε

$$f'(x_2) = \frac{f(2) - f(x)}{2 - x} \Leftrightarrow f'(x_2) = \frac{2 - f(x)}{2 - x} \quad (2)$$

$$x_1 < x_2 \stackrel{f \downarrow}{\Rightarrow} f'(x_1) > f'(x_2) \Leftrightarrow \boxed{\frac{f(x)}{x - 1} > \frac{2 - f(x)}{2 - x}} \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$

Κελάφας
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ