ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ & ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ ΠΟΥ ΥΠΗΡΕΤΟΥΝ ΣΤΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ

ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 15 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2023

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Για να δείξουμε ότι η f είναι συνεχής στο σημείο x_0, αρκεί να δείξουμε ότι $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ ή $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x) - f(x_0)] = 0$.

Για $x \neq x_0$ έχουμε :

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\cdot(x - x_0), \text{ οπότε}$$

$$\lim_{x\to x_0}[f(x) - f(x_0)] = \lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\cdot(x - x_0)\right]$$

$$= \lim_{x\to x_0}\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x\to x_0}(x - x_0) = f'(x_0)\cdot 0 = 0$$

αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

Επομένως $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ δηλαδή η f είναι συνεχής στο x_0.

Α2. Θεώρημα Bolzano

Έστω μια συνάρτηση f, ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν:

- η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και, επιπλέον, ισχύει
- $f(\alpha)\cdot f(\beta) < 0$,

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$, δηλαδή, υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο ανοικτό διάστημα (α, β).

Α3. Οι συναρτήσεις f, g λέγονται ίσες συναρτήσεις, όταν έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού Α και $f(x) = g(x)$, για κάθε $x \in A$.

Α4. **α.** Σωστό, **β.** Σωστό, **γ.** Λάθος, **δ.** Σωστό, **ε.** Λάθος.

ΘΕΜΑ Β

Β1. $D_h = D_{fog} = \{x \in D_g \text{ και } g(x) \in D_f\} = \{x \in IR \text{ και } x^2 \in IR\} = IR$

$h(x) = (fog)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = (x^2)^2 - 8x^2 + 16 = x^4 - 8x^2 + 16$

Επομένως $\mathbf{h(x) = x^4 - 8x^2 + 16,\ x \in IR}$

Β2. $h(1) = 1 - 8 + 16 = 9$

$h'(x) = (x^4 - 8x^2 + 16)' = 4x^3 - 16x,\ x \in IR$

$h'(1) = 4 - 16 = -12$

(ε) : η εφαπτομένη της C_h στο σημείο $(1, h(1))$

$(\varepsilon): y - h(1) = h'(1)\cdot(x - 1) \Leftrightarrow$

$(\varepsilon): y - 9 = -12\cdot(x - 1) \Leftrightarrow$

$(\varepsilon): y - 9 = -12x + 12 \Leftrightarrow$

$\mathbf{(\varepsilon): y = -12x + 21}$

Β3. $I = \int_{-1}^{1} h(x)\,dx = \int_{-1}^{1}(x^4 - 8x^2 + 16)\,dx = \left[\frac{x^5}{5} - 8\frac{x^3}{3} + 16x\right]_{-1}^{1}$

$= \left(\frac{1}{5} - \frac{8}{3} + 16\right) - \left(-\frac{1}{5} + \frac{8}{3} - 16\right) = \frac{1}{5} - \frac{8}{3} + 16 + \frac{1}{5} - \frac{8}{3} + 16$

$= \frac{2}{5} - \frac{16}{3} + 32 = \frac{6}{15} - \frac{80}{15} + \frac{480}{15} = \mathbf{\frac{406}{15}}$

Β4. $\lim\limits_{x\to2}\frac{h(x)}{(x-2)^2} = \lim\limits_{x\to2}\frac{x^4 - 8x^2 + 16}{(x-2)^2} = \lim\limits_{x\to2}\frac{(x^2-4)^2}{(x-2)^2}$

$= \lim\limits_{x\to2}\frac{[(x-2)\cdot(x+2)]^2}{(x-2)^2} = \lim\limits_{x\to2}\frac{\cancel{(x-2)^2}\cdot(x+2)^2}{\cancel{(x-2)^2}}$

$= \lim\limits_{x\to2}(x+2)^2 = 4^2 = \mathbf{16}$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Για $x > 0 : f'(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)' = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x = 1$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 1}{x^2} > 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow x^2 > 1 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x > 1$$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

Η f είναι γν. φθίνουσα στο $(0, 1]$ και γν. αύξουσα στο $[1, +\infty)$.
Η f παρουσιάζει ελάχιστο για $x = 1$ την τιμή $f(1) = 2$.

Γ2. Για $x > 0 : f''(x) = \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)' = -(x^{-2})' = 2x^{-3} = \frac{2}{x^3} > 0$

Η f είναι κυρτή στο $(0, +\infty)$ και δεν έχει σημεία καμπής.

Γ3. ∘ Η f είναι συνεχής στο $\left[\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\right]$ ως παραγωγίσιμη

∘ Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\left(\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\right)$

∘ $f\left(\frac{2}{3}\right) = f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{2}{3} + \frac{3}{2} = \frac{13}{6}$

άρα **ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θ. Rolle για την f στο διάστημα $\left[\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\right]$**

Γ4. Είναι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [1, e]$, άρα

$$E = \int_1^e f(x)\,dx = \int_1^e \left(x + \frac{1}{x}\right) dx = \left[\frac{x^2}{2} + \ell n x\right]_1^e = \frac{e^2}{2} + 1 - \frac{1}{2} = \mathbf{\frac{1 + e^2}{2}} \text{ **τ.μ.**}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $x_A = x_B = α$, άρα $B\,(α\,,\,y_B)$

$B\,(α\,,\,y_B) \in C_f \;\Leftrightarrow\; y_B = f\,(α) \;\Leftrightarrow\; y_B = e^{-α}$, άρα $B\,(α\,,\,e^{-α})$

$y_Γ = y_B = e^{-α}$, άρα $Γ\,(x_Γ\,,\,e^{-α})$

$$Γ\,(x_Γ\,,\,e^{-α}) \in C_g \;\Leftrightarrow\; e^{-α} = g\,(x_Γ) \;\Leftrightarrow\; e^{-α} = -\frac{e}{x_Γ} \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{e^{α}} = -\frac{e}{x_Γ} \;\Leftrightarrow$$

$x_Γ = -e \cdot e^{α} \;\Leftrightarrow\; x_Γ = -e^{1+α}$, άρα $\mathbf{Γ\,(-e^{1+α}\,,\,e^{-α})}$

Δ2. $E_{ΑΒΓΔ} = (ΑΔ)\cdot(ΑΒ) \;\Leftrightarrow$

$E_{ΑΒΓΔ} = (x_A - x_Δ)\cdot(y_B - y_A) \;\Rightarrow$

$E\,(α) = (α + e^{1+α})\cdot(e^{-α} - 0) \;\Leftrightarrow$

$E\,(α) = α\cdot e^{-α} + e^{1+α-α} \;\Leftrightarrow$

$\mathbf{E\,(α) = α\cdot e^{-α} + e}$, $α > -1$.

Δ3. Για $α > -1$: $E'(α) = (α\cdot e^{-α} + e)' = e^{-α} - α\cdot e^{-α} = (1-α)\cdot e^{-α}$

$E'(α) = 0 \;\Leftrightarrow\; (1-α)\cdot e^{-α} = 0 \;\Leftrightarrow\; 1-α = 0 \;\Leftrightarrow\; α = 1$

$E'(α) > 0 \;\Leftrightarrow\; (1-α)\cdot e^{-α} > 0 \;\overset{e^{-α}>0}{\Leftrightarrow}\; 1-α > 0 \;\overset{α>-1}{\Leftrightarrow}\; -1 < α < 1$

$α$	-1		1		$+\infty$
$E'(α)$		+	0	-	
$E\,(α)$		↗		↘	

Το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ μεγιστοποιείται όταν α = 1, δηλαδή όταν Α (1 , 0).