ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟΥ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΟΥ 1966

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΕ ΑΛΓΕΒΡΑ - ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ - ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ
ΤΥΠΟΣ Α΄
Πέμπτη 8 Σεπτεμβρίου 1966

ΑΛΓΕΒΡΑ

Ζήτημα 1ο

α) Ἐὰν ὁ λόγος τῆς γεωμετρικῆς προόδου ἀπολύτως θεωρούμενος εἶναι μικρότερος τῆς 1, οἱ ὅροι ἀπολύτως θεωρούμενοι βαίνουν ἐλαττούμενοι (φθίνοντες) καὶ ἡ πρόοδος λέγεται (ἀπολύτως) φθίνουσα.

β) Ἄς παραστήσωμεν τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων τῆς ἀριθμητικῆς προόδου μὲ Σ, ἤτοι : $Σ=α+β+γ+...+κ+λ+τ$, ὅτε εἶναι καὶ $Σ=τ+λ+κ+...+γ+β+α$.

Προσθέτοντες αὐτὰς κατὰ μέλη εὑρίσκομεν :

$$2Σ=(α+τ)+(β+λ)+(γ+κ)...+(τ+α)$$

$$2Σ=(α+τ)ν. \text{ Ἑπομένως } Σ=\frac{(α+τ)ν}{2} \quad (2), \text{ Ἤτοι :}$$

Τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων ἀριθμητικῆς τινος προόδου μὲ ὡρισμένον πλῆθος ὅρων ἰσοῦται μὲ τὸ ἡμιάθροισμα τῶν ἄκρων ὅρων της ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τοῦ πλήθους τῶν ὅρων αὐτῆς.

Ἐὰν εἰς τὴν (2) γράψωμεν ἀντὶ τοῦ τ τὸ ἴσον αὐτοῦ $α+(ν-1)ω$, ὅπου ω παριστάνει τὴν διαφορὰν τῆς προόδου, εὑρίσκομεν

$$Σ=\frac{[α+α+(ν-1)ω]ν}{2}=\frac{2α+(ν-1)ω}{2}\cdot ν, \text{ ἤτοι } Σ=\frac{2α+(ν-1)ω}{2}\cdot ν.$$

Ζήτημα 2ο

Έστω ω ο λόγος της αριθμητικής προόδου και λ ο λόγος της γεωμετρικής.

Είναι $β = 2 + ω$, $γ = 2 + 2ω$ και $δ = 2 + 3ω$ και $Β = 2λ$, $Γ = 2λ^2$ και $Δ = 2λ^3$.

- $γ = Γ \Leftrightarrow 2 + 2ω = 2λ^2 \overset{:2}{\Leftrightarrow} 1 + ω = λ^2 \Leftrightarrow ω = 1 - λ^2 \ (1)$
- $δ = Δ \Leftrightarrow 2 + 3ω = 2λ^3 \overset{(1)}{\Rightarrow} 2 + 3(1 - λ^2) = 2λ^3 \Leftrightarrow 2 + 3 - 3λ^2 = 2λ^3 \Leftrightarrow$
  $2λ^3 + 3λ^2 - 5 = 0 \Leftrightarrow (λ - 1)(2λ^2 - λ - 1) = 0 \Leftrightarrow (λ - 1)^2\cdot(2λ + 1) = 0 \Leftrightarrow$
  $λ - 1 = 0 \text{ ή } 2λ + 1 = 0 \Leftrightarrow λ = 1 \text{ ή } λ = -\frac{1}{2}$

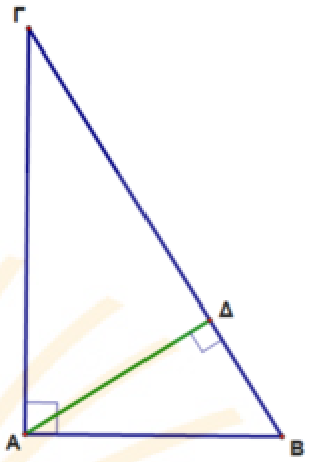
▹ Αν $λ = 1 \overset{(1)}{\Rightarrow} ω = 0$

▹ Αν $λ = -\frac{1}{2} \overset{(1)}{\Rightarrow} ω = \frac{3}{4}$

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Ζήτημα 1ο

Αν ΑΒΓ ορθογώνιο τρίγωνο με $Α = 90^0$ και ΑΔ το ύψος του, τότε :



$$(ΑΒ)^2 = (ΒΓ)\cdot(ΒΔ) = (ΒΓ)^2 - (ΑΓ)^2$$

$$(ΑΓ)^2 = (ΒΓ)\cdot(ΓΔ) = (ΒΓ)^2 - (ΑΒ)^2$$

$$(ΒΓ)^2 = (ΑΒ)^2 + (ΑΓ)^2$$

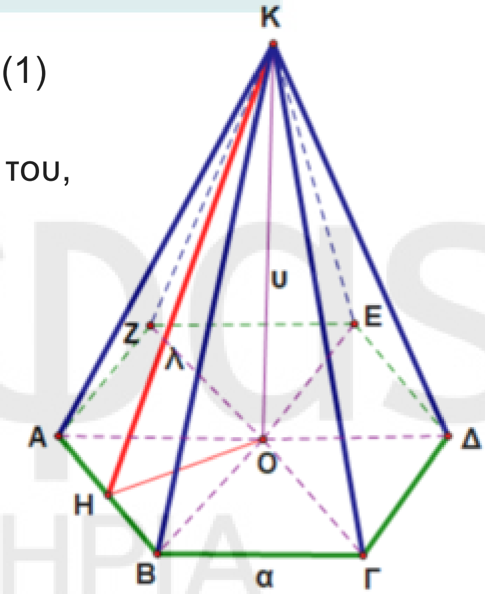
$$\frac{(ΑΒ)^2}{(ΑΓ)^2} = \frac{(ΒΔ)}{(ΓΔ)}$$

$$(ΑΔ)^2 = (ΒΔ)\cdot(ΓΔ)$$

Ζήτημα 2ο

$$Ε_{παρ} = \frac{1}{2}\cdot(\text{περίμετρος βάσης})\cdot(\text{απόστημα}) \Rightarrow$$

$$Ε = \frac{1}{2}\cdot 6α\cdot λ \Leftrightarrow Ε = 3\cdot α\cdot λ \Rightarrow λ = (ΚΗ) = \frac{Ε}{3α} \quad (1)$$



Το $\overset{\Delta}{ΟΑΒ}$ είναι ισόπλευρο και το ΟΗ είναι ύψος του,

άρα $(ΟΗ) = \frac{α\sqrt{3}}{2} \quad (2)$

Πυθαγόρειο θεώρημα στο $\overset{\Delta}{ΟΗΚ}$:

$$(ΟΚ)^2 = (ΚΗ)^2 - (ΟΗ)^2 \overset{(1)}{\underset{(2)}{\Rightarrow}}$$

$$υ^2 = \left(\frac{Ε}{3α}\right)^2 - \left(\frac{α\sqrt{3}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow υ^2 = \frac{Ε^2}{9α^2} - \frac{3α^2}{4} \Leftrightarrow$$

$$υ^2 = \frac{4Ε^2 - 27α^4}{36α^2} \Rightarrow υ = \frac{\sqrt{4Ε^2 - 27α^4}}{6α} \quad (3)$$

$$Ε_β = 6\cdot Ε_{\overset{\Delta}{ΟΑΒ}} = 6\cdot\frac{α^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3α^2\sqrt{3}}{2} \quad (4)$$

$$V = \frac{1}{3}\cdot Ε_β\cdot υ \overset{(3)}{\underset{(4)}{\Rightarrow}} V = \frac{1}{3}\cdot\frac{3α^2\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{4Ε^2 - 27α^4}}{6α} \Rightarrow \boxed{\mathbf{V = \frac{α\cdot\sqrt{12Ε^2 - 81α^4}}{12}}}$$

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

Ζήτημα 1ο

$$ημ^2x + συν^2x = 1 \iff συν^2x = 1 - ημ^2x \iff συνx = \pm\sqrt{1 - ημ^2x}$$

- Αν $0^0 < x < 90^0$ ή $270^0 < x < 360^0$:

  ▷ $συνx = \sqrt{1 - ημ^2x}$

  ▷ $εφx = \dfrac{ημx}{συνx} \Rightarrow εφx = \dfrac{ημx}{\sqrt{1 - ημ^2x}}$

  ▷ $σφx = \dfrac{συνx}{ημx} \Rightarrow εφx = \dfrac{\sqrt{1 - ημ^2x}}{ημx}$

  ▷ $τεμx = \dfrac{1}{συνx} \Rightarrow τεμx = \dfrac{1}{\sqrt{1 - ημ^2x}}$

  ▷ $στεμx = \dfrac{1}{ημx}$

- Αν $90^0 < x < 270^0$:

  ▷ $συνx = -\sqrt{1 - ημ^2x}$

  ▷ $εφx = \dfrac{ημx}{συνx} \Rightarrow εφx = -\dfrac{ημx}{\sqrt{1 - ημ^2x}}$

  ▷ $σφx = \dfrac{συνx}{ημx} \Rightarrow εφx = -\dfrac{\sqrt{1 - ημ^2x}}{ημx}$

  ▷ $τεμx = \dfrac{1}{συνx} \Rightarrow τεμx = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - ημ^2x}}$

  ▷ $στεμx = \dfrac{1}{ημx}$

Ζήτημα 2ο

Είναι : $\etaμx = -\frac{4}{5}$, άρα $180^0 < x < 360^0$

- Αν $180^0 < x < 270^0$ τότε :

$\triangleright$ $συνx = -\sqrt{1 - ημ^2x} = -\sqrt{1 - \left(-\frac{4}{5}\right)^2} = -\sqrt{1 - \frac{16}{25}} = -\sqrt{\frac{9}{25}} = -\frac{3}{5}$

$\triangleright$ $εφx = \frac{ημx}{συνx} = \frac{-\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = \frac{4}{3}$

$\triangleright$ $σφx = \frac{συνx}{ημx} = \frac{-\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}$

$\triangleright$ $τεμx = \frac{1}{συνx} = \frac{1}{-\frac{3}{5}} = -\frac{5}{3}$

$\triangleright$ $στεμx = \frac{1}{ημx} = \frac{1}{-\frac{4}{5}} = -\frac{5}{4}$

- Αν $270^0 < x < 360^0$ τότε :

$\triangleright$ $συνx = \sqrt{1 - ημ^2x} = \sqrt{1 - \left(-\frac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$

$\triangleright$ $εφx = \frac{ημx}{συνx} = \frac{-\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3}$

$\triangleright$ $σφx = \frac{συνx}{ημx} = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4}$

$\triangleright$ $τεμx = \frac{1}{συνx} = \frac{1}{\frac{3}{5}} = \frac{5}{3}$

$\triangleright$ $στεμx = \frac{1}{ημx} = \frac{1}{-\frac{4}{5}} = -\frac{5}{4}$