ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟΥ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΟΥ 1966
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ
ΤΥΠΟΣ Β΄
Παρασκευή 2 Σεπτεμβρίου 1966

Ζήτημα 1ο

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΙΣ ΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ

$$\begin{cases} \alpha x+\beta\psi=\gamma \\ \alpha_1 x+\beta_1\psi=\gamma_1 \end{cases} \qquad (1)$$

Ὑποθέτομεν ὅτι οἱ συντελεσταὶ τῶν ἀγνώστων δὲν εἶναι ὅλοι μηδενικοί. Δυνάμεθα νὰ ὑποθέσωμεν ὅτι $\alpha\neq 0$.

Τότε ἡ πρώτη ἐξίσωσις τοῦ συστήματος λυομένη πρὸς x, τοῦ ὁποίου ὁ συντελεστὴς εἶναι $\neq 0$, δίδει $x=\frac{\gamma-\beta\psi}{\alpha}$.

Καὶ ὅταν ἡ τιμὴ αὐτὴ τοῦ x εἰσαχθῇ εἰς τὴν δευτέραν ἐξίσωσιν, ἡ ἐξίσωσις αὐτὴ γίνεται $\alpha_1\frac{\gamma-\beta\psi}{\alpha}+\beta_1\gamma=\gamma_1$, ἡ ὁποία ἰσοδυναμεῖ μὲ τὴν $(\alpha\beta_1-\alpha_1\beta)\psi=\alpha\gamma_1-\alpha_1\gamma$.

Οὕτω, τὸ σύστημα (1) ἰσοδυναμεῖ πρὸς τὸ σύστημα

$$\begin{aligned} x&=\frac{\gamma-\beta\psi}{\alpha} \\ (\alpha\beta_1-\alpha_1\beta)\psi&=\alpha\gamma_1-\alpha_1\gamma \end{aligned} \qquad (2)$$

Διακρίνομεν τώρα δύο περιπτώσεις:

1ον. $\alpha\beta_1-\alpha_1\beta\neq 0$. Ἡ δευτέρα ἐξίσωσις τοῦ (2) θὰ ἔχῃ τότε μίαν μόνην λύσιν, τὴν $\psi=\frac{\alpha\gamma_1-\alpha_1\gamma}{\alpha\beta_1-\alpha_1\beta}$.

Ἡ τιμὴ αὐτὴ τοῦ ψ εἰσαγομένη εἰς τὴν πρώτην ἐξίσωσιν τοῦ (2) δίδει τὴν ἀντίστοιχον τιμὴν τοῦ x, τὴν $x=\frac{\gamma\beta_1-\beta\gamma_1}{\alpha\beta_1-\alpha_1\beta}$.

Οὕτω, τὸ σύστημα (2), καὶ συνεπῶς καὶ τὸ ἰσοδύναμον πρὸς αὐτὸ (1) ἔχει μίαν λύσιν, εἰς τὴν θεωρουμένην περίπτωσιν.

Παρατηροῦμεν ὅμως, ὅτι, ὅταν $\alpha\beta_1-\alpha_1\beta\neq 0$ ἀποκλείεται νὰ εἶναι μηδενικοὶ οἱ συντελεσταὶ τῶν ἀγνώστων καὶ ἑπομένως παρέλκει ἡ ὑπόθεσις τοῦ νὰ μὴ εἶναι οἱ συντελεσταὶ τῶν ἀγνώστων ὅλοι μηδενικοί.

Ἡ παράστασις $\alpha\beta_1-\alpha_1\beta$ λέγεται **ὀρίζουσα** τοῦ συστήματος (1). Δυνάμεθα λοιπὸν νὰ λέγωμεν:

Ἂν ἡ ὀρίζουσα τοῦ συστήματος (1) εἶναι $\neq 0$, τὸ σύστημα ἔχει μίαν μόνην λύσιν.

2ον. $\alpha\beta_1-\alpha_1\beta=0$. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ δευτέρα ἐξίσωσις τοῦ (2) γίνεται μὲ κάθε ψ. $0=\alpha\gamma_1-\alpha_1\gamma$.

Καὶ ἂν μὲν εἶναι πράγματι ἡ $\alpha\gamma_1-\alpha_1\gamma$ ἴση μὲ μηδέν, ἡ δευτέρα ἐξίσωσις τοῦ (2) ἀληθεύει μὲ κάθε ψ καὶ οὕτω τὸ σύστημα (2) ἀνάγεται εἰς μόνην τὴν $x=\frac{\gamma-\beta\psi}{\alpha}$.

Αὐτὴ ἔχει ἀπείρους λύσεις, διότι δυνάμεθα νὰ δώσωμεν τυχοῦσαν τιμὴν εἰς τὸν ψ καὶ νὰ εὑρεθῇ ἐκ τῆς ἀνωτέρω ἐκφράσεως τοῦ x, ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ τοῦ x.

Διὰ τοῦτο λέγομεν ὅτι τὸ σύστημα (2) καὶ συνεπῶς καὶ τὸ ἰσοδύναμόν του (1) εἶναι **ἀόριστον**.

Ἂν ὅμως ἡ παράστασις $\alpha\gamma_1-\alpha_1\gamma$ εἶναι $\neq 0$, ἡ δευτέρα ἐξίσωσις τοῦ (2) εἶναι ἀδύνατος, ὁπότε καὶ τὸ σύστημα (2) καθὼς καὶ τὸ (1) εἶναι **ἀδύνατον.**

Ὅταν ὅμως εἶναι $\alpha\gamma_1-\alpha_1\gamma\neq 0$, τότε $\alpha\gamma_1\neq\alpha_1\gamma$. Καὶ διαιροῦντες διὰ τοῦ α, τὸ ὁποῖον εἶναι $\neq 0$, εὑρίσκομεν ὅτι $\gamma_1\neq\frac{\alpha_1\gamma}{\alpha}$, ὁπότε $\beta\gamma_1\neq\frac{\alpha_1\gamma\cdot\beta}{\alpha}$.

Ἄρα καὶ $\beta\gamma_1-\beta_1\gamma\neq\frac{\alpha_1\beta\gamma}{\alpha}-\beta_1\gamma$.

δηλ. $\beta\gamma_1-\beta_1\gamma\neq\gamma\,\frac{(\alpha_1\beta-\alpha\beta_1)}{\alpha}$ ἤτοι $\beta\gamma_1-\beta_1\gamma\neq 0$

διότι $\frac{\gamma(\alpha_1\beta-\alpha\beta_1)}{\alpha}=0$, ἀφοῦ $\alpha_1\beta-\alpha\beta_1=0$ ἐξ ὑποθέσεως.

Ὁμοίως συλλογιζόμενοι εὑρίσκομεν, ὅτι ἂν $\alpha\gamma_1-\alpha_1\gamma=0$, τότε καὶ $\beta\gamma_1-\beta_1\gamma=0$.

Ὥστε :

Ὅταν ἡ ὁρίζουσα τοῦ συστήματος (1) εἶναι μηδενική, χωρὶς νὰ εἶναι μηδενικοὶ ταὐτοχρόνως καὶ ὅλοι οἱ συντελεσταὶ τῶν ἀγνώστων, τὸ σύστημα εἶναι ἢ ἀόριστον ἢ ἀδύνατον. Καὶ ἀόριστον μὲν θὰ εἶναι ὅταν εἶναι ταὐτοχρόνως μηδενικὴ καὶ μία οἱαδήποτε ἐκ τῶν παραστάσεων $\alpha_1\gamma-\alpha_1\gamma$ ἢ $\beta\gamma_1-\beta_1\gamma$, ἀδύνατον δὲ ὅταν μία ἐκ τῶν παραστάσεων αὐτῶν εἶναι $\neq 0$.

Παρατήρησις Ι. Εἶναι δυνατὸν ἡ λύσις ἑνὸς γενικοῦ προβλήματος νὰ ὁδηγήσῃ εἰς σύστημα δύο πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων καὶ νὰ εἰσαχθῇ ἡ ὑπόθεσις ὅτι ὅλοι οἱ συντελεσταὶ τῶν ἀγνώστων εἶναι μηδενικοί. Τότε τὸ (1) γίνεται $0=\gamma$.

$$0=\gamma_1.$$

μὲ κάθε x καὶ κάθε ψ.

Καὶ τότε φαίνεται ὅτι ἂν οἱ γ, γ_1 εἶναι μηδενικοὶ καὶ οἱ δύο, τὸ σύστημα ἀληθεύει μὲ κάθε x καὶ κάθε ψ.

Λέγομεν ὅτι εἶναι **ἀόριστον μὲ πλήρη ἀοριστίαν.** Ἂν ὅμως εἷς ἐκ τῶν γ ἢ γ_1 εἶναι $\neq 0$, τὸ σύστημα εἶναι ἀδύνατον.

Παρατήρησις ΙΙ. Ἡ παράστασις $\alpha\beta_1-\alpha_1\beta$ εὑρίσκεται ὡς ἑξῆς: Γράφονται αἱ ἐξισώσεις ὥστε οἱ συντελεσταὶ τοῦ αὐτοῦ ἀγνώστου νὰ εἶναι εἰς τὴν αὐτὴν στήλην. Τότε πολ/ζονται οἱ συντελεσταὶ αὐτοὶ τῆς πρώτης, ἕκαστος ἐπὶ τὸν διαγωνίως ἀπέναντι τῆς δευτέρας καὶ ἀπὸ τὸ πρῶτον γινόμενον ἀφαιρεῖται τὸ δεύτερον.

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον εὑρίσκονται καὶ οἱ ἀριθμηταὶ τῶν τύπων τῶν ἀγνώστων x, ψ, ἀφοῦ πρῶτον μεταφερθοῦν εἰς τὸ πρῶτον μέλος καὶ οἱ ὅροι οἱ ἀνεξάρτητοι τῶν ἀγνώστων.

Διὰ τὸν καταρτισμὸν τοῦ ἀριθμητοῦ ἑκάστου ἀγνώστου θὰ παραλείπεται νοερῶς ἡ στήλη αὐτοῦ τοῦ ἀγνώστου καὶ θὰ πολ/ζωνται οἱ ὅροι τῆς ἑπομένης στήλης, ἕκαστος ἐπὶ τὸν διαγωνίως ἀπέναντι τῆς ἄλλης στήλης, παραλειπομένου τοῦ ἀγνώστου ποὺ περιέχεται εἰς τὴν μίαν ἐξ αὐτῶν τῶν στηλῶν, ἀπὸ τὸ πρῶτον δὲ γινόμενον θὰ ἀφαιρῆται τὸ δεύτερον. Παρονομαστὴς εἶναι ἡ ὁρίζουσα τοῦ συστήματος.

Ζήτημα 2ο

Έστω x μέτρα το μήκος του μπροστινού τροχού και y μέτρα το μήκος του πίσω τροχού.

Σε μήκος 1732,5 μέτρων ο μπροστινός τροχός εκτελεί $\frac{1732{,}5}{x}$ στροφές ενώ για το ίδιο μήκος ο πίσω τροχός εκτελεί $\frac{1732{,}5}{y}$ στροφές, άρα $\frac{1732{,}5}{x} - \frac{1732{,}5}{y} = 165 \quad (1)$

Μετά την αύξηση της περιμέτρου κάθε τροχού κατά $\frac{3}{4}$ μέτρα έχουμε ότι

σε μήκος 1732,5 μέτρων ο μπροστινός τροχός εκτελεί $\frac{1732{,}5}{x+\frac{3}{4}}$ στροφές ενώ για το ίδιο μήκος ο πίσω τροχός εκτελεί $\frac{1732{,}5}{y+\frac{3}{4}}$ στροφές, άρα $\frac{1732{,}5}{x+\frac{3}{4}} - \frac{1732{,}5}{y+\frac{3}{4}} = 112 \quad (2)$

$$(1) \overset{\cdot 2}{\Rightarrow} \frac{3465}{x} - \frac{3465}{y} = 330 \overset{:165}{\Rightarrow} \frac{21}{x} - \frac{21}{y} = 2 \overset{\cdot xy}{\Rightarrow} 21y - 21x = 2xy \quad (3)$$

$$(2) \Rightarrow \frac{6930}{4x+3} - \frac{6930}{4y+3} = 112 \overset{:14}{\Rightarrow} \frac{495}{4x+3} - \frac{495}{4y+3} = 8 \overset{\cdot(4x+3)(4y+3)}{\Rightarrow}$$

$$495\cdot(4y+3) - 495\cdot(4x+3) = 8\cdot(4x+3)\cdot(4y+3) \Rightarrow$$

$$1980y + 1485 - 1980x - 1485 = 8\cdot(16xy + 12x + 12y + 9) \Rightarrow$$

$$1980y - 1980x = 64\cdot 2xy + 96x + 96y + 72 \overset{(3)}{\Rightarrow}$$

$$1980y - 1980x = 64\cdot(21y - 21x) + 96x + 96y + 72 \Rightarrow$$

$$1980y - 1980x = 1344y - 1344x + 96x + 96y + 72 \Rightarrow$$

$$540y = 732x + 72 \overset{:12}{\Rightarrow} 45y = 61x + 6 \Rightarrow y = \frac{61x+6}{45} \quad (4)$$

$$(3) \overset{(4)}{\Rightarrow} 21\cdot\frac{61x+6}{45} - 21x = 2x\cdot\frac{61x+6}{45} \overset{\cdot 45}{\Rightarrow} 21\cdot(61x+6) - 945x = 2x\cdot(61x+6) \Rightarrow$$

$$1281x + 126 - 945x = 122x^2 + 12x \Rightarrow 122x^2 - 324x - 126 = 0 \overset{:2}{\Rightarrow} 61x^2 - 162x - 63 = 0$$

$$\Delta = (-162)^2 - 4\cdot 61\cdot(-63) = 41616 = 204^2$$

$$x = \frac{162 \pm 204}{122} = \begin{cases} \frac{366}{122} = 3 \ \text{δεκτή} \\ \frac{-42}{122} < 0 \ \text{απορρίπτεται} \end{cases}$$

Επομένως $\boxed{x = 3\,\mu.}$ και $y \overset{(4)}{=} \frac{61\cdot 3 + 6}{45} = \frac{189}{45} = \frac{21}{5} \Rightarrow \boxed{y = 4{,}2\,\mu.}$

Ζήτημα 3ο

$$\frac{x^3-1}{x^2}+\frac{3\sqrt[3]{2}}{2}<0$$

Πρέπει $x \neq 0$ (1)

Κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών και έχουμε $2x^3+3\sqrt[3]{2}x^2-2<0$

1η λύση

Θέτουμε $x=\sqrt[3]{2}y$ και η ανίσωση γίνεται :

$2(\sqrt[3]{2}y)^3+3\sqrt[3]{2}(\sqrt[3]{2}y)^2-2<0 \Leftrightarrow$

$4y^3+6y^2-2<0 \Leftrightarrow$

$2y^3+3y^2-1<0 \Leftrightarrow$

$(y+1)\cdot(2y^2+y-1)<0 \Leftrightarrow$

$(y+1)^2\cdot(2y-1)<0 \Leftrightarrow$

$y+1\neq 0$ και $2y-1<0 \Leftrightarrow$

$y\neq -1$ και $y<\frac{1}{2} \underset{y=\frac{x}{\sqrt[3]{2}}}{\overset{x=\sqrt[3]{2}y}{\Leftrightarrow}}$

$\frac{x}{\sqrt[3]{2}}\neq -1$ και $\frac{x}{\sqrt[3]{2}}<\frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$x\neq -\sqrt[3]{2}$ (2) και $x<\frac{\sqrt[3]{2}}{2}$ (3)

Από (1), (2) και (3) έχουμε $\mathbf{x\in(-\infty,-\sqrt[3]{2})\cup(-\sqrt[3]{2},0)\cup\left(0,\frac{\sqrt[3]{2}}{2}\right)}$

2η λύση

$2x^3+3\sqrt[3]{2}x^2-2<0 \Leftrightarrow$

$2x^3+2\sqrt[3]{2}x^2+\sqrt[3]{2}x^2+\sqrt[3]{2^2}x-\sqrt[3]{2^2}x-\sqrt[3]{2^3}<0 \Leftrightarrow$

$2x^2\cdot(x+\sqrt[3]{2})+\sqrt[3]{2}x\cdot(x+\sqrt[3]{2})-\sqrt[3]{2^2})\cdot(x+\sqrt[3]{2})<0 \Leftrightarrow$

$(x+\sqrt[3]{2})\cdot(2x^2+\sqrt[3]{2}x-\sqrt[3]{2^2})<0 \Leftrightarrow$

$(x+\sqrt[3]{2})^2\cdot(2x-\sqrt[3]{2})<0 \Leftrightarrow$

$x+\sqrt[3]{2}\neq 0$ και $2x-\sqrt[3]{2}<0 \Leftrightarrow$

$x\neq -\sqrt[3]{2}$ (2) και $x<\frac{\sqrt[3]{2}}{2}$ (3)

Από (1), (2) και (3) έχουμε $\mathbf{x\in(-\infty,-\sqrt[3]{2})\cup(-\sqrt[3]{2},0)\cup\left(0,\frac{\sqrt[3]{2}}{2}\right)}$