ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟΥ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΟΥ 1966

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΤΥΠΟΣ Β΄

Τετάρτη 7 Σεπτεμβρίου 1966

Ζήτημα 1ο

Γεωμετρικὸς τόπος σημείων, τὰ ὁποῖα ἔχουσι μίαν κοινὴν ἰδιότητα, καλεῖται ἡ γραμμὴ ἢ ἡ ἐπιφάνεια, τῆς ὁποίας ὅλα τὰ σημεῖα καὶ μόνον αὐτὰ ἔχουσι τὴν κοινὴν ταύτην ἰδιότητα.

1ον. Ἑκάστη περιφέρεια κύκλου εἶναι γεωμ. τόπος τῶν σημείων, τὰ ὁποῖα ἀπέχουσιν ἀπὸ τὸ κέντρον ἀπόστασιν ἴσην πρὸς τὴν ἀκτῖνα αὐτοῦ.

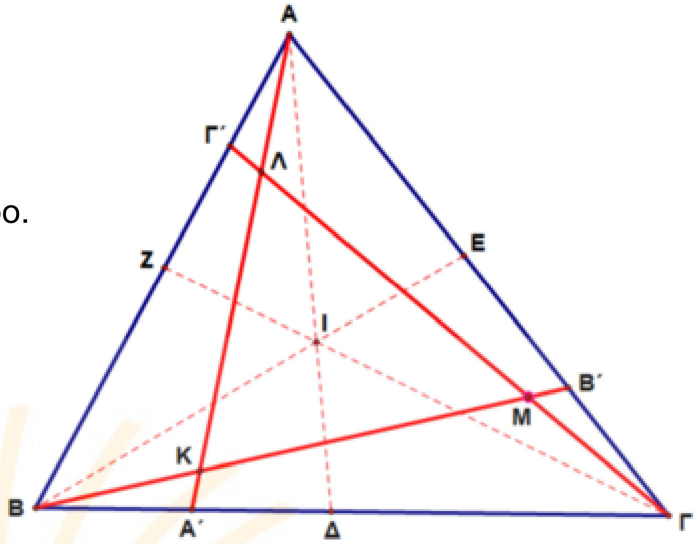
2ον. Ἡ εὐθεῖα, ἥτις τέμνει δίχα καὶ καθέτως ἓν εὐθ. τμῆμα, εἶναι γεωμ. τόπος τῶν σημείων, ὧν ἕκαστον ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τὰ ἄκρα τοῦ εὐθυγράμμου τούτου τμήματος.

3ον. Ἡ διχοτόμος γωνίας εἶναι γεωμ. τόπος τῶν σημείων τῆς γωνίας ταύτης, ὧν ἕκαστον ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τὰς πλευρὰς αὐτῆς.

4ον. Ἡ γραμμή, τὴν ὁποίαν ἀποτελοῦσι τὰ τόξα τῶν τμημάτων, τὰ ὁποῖα ἔχουσι χορδὴν ΑΒ ὡρισμένην κατὰ θέσιν καὶ μέγεθος καὶ δέχονται δοθεῖσαν γωνίαν, εἶναι γεωμ. τόπος τῶν σημείων, ἐξ ἑκάστου τῶν ὁποίων ἡ χορδὴ ΑΒ φαίνεται ὑπὸ τὴν δοθεῖσαν γωνίαν.

5ον. Ἡ περιφέρεια, ἥτις ἔχει διάμετρον δοθὲν κατὰ θέσιν καὶ μέγεθος εὐθ. τμῆμα ΑΒ, εἶναι γεωμ. τόπος τῶν σημείων, ἐξ ἑκάστου τῶν ὁποίων τὸ εὐθ. τμῆμα ΑΒ φαίνεται ὑπὸ ὀρθὴν γωνίαν.

Ζήτημα 2ο



1η λύση

Φέρνουμε τις διχοτόμους ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ του τριγώνου $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ και Ι είναι το έγγεντρο.

Είναι $B\hat{A}A' < B\hat{A}\Delta = \dfrac{\hat{A}}{2}$, άρα

η ΑΑ΄ βρίσκεται εντός του $\overset{\Delta}{AB\Delta}$ (1)

Είναι $\Gamma\hat{B}B' < \Gamma\hat{B}E = \dfrac{\hat{B}}{2}$, άρα

η ΒΒ΄ βρίσκεται εντός του $\overset{\Delta}{B\Gamma E}$ (2)

Είναι $A\hat{\Gamma}\Gamma' < A\hat{\Gamma}Z = \dfrac{\hat{\Gamma}}{2}$, άρα η ΓΓ΄ βρίσκεται εντός του $\overset{\Delta}{A\Gamma Z}$ (3)

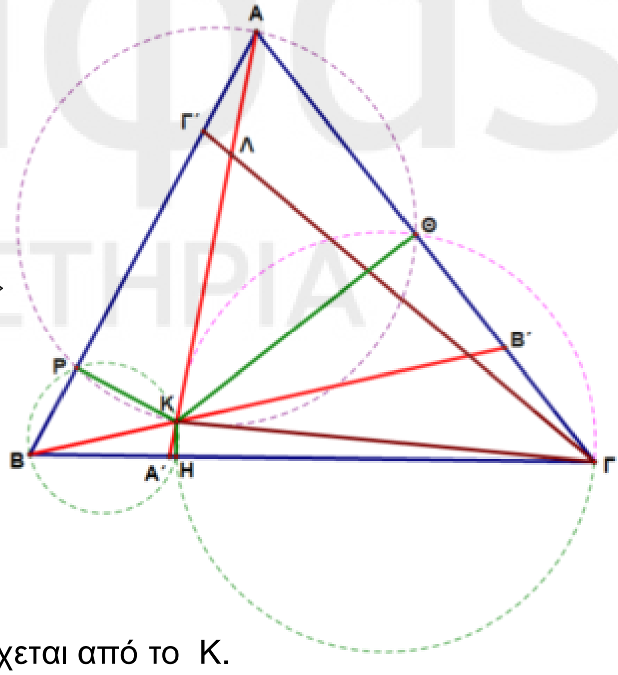
Τα τμήματα ΑΑ΄, ΒΒ΄ τέμνονται στο Κ $\underset{(2)}{\overset{(1)}{\Rightarrow}}$

το Κ βρίσκεται εντός των τριγώνων $\overset{\Delta}{AB\Delta}$, $\overset{\Delta}{B\Gamma E}$,

δηλαδή το Κ βρίσκεται εντός του τριγώνου $\overset{\Delta}{B\Delta I}$ (4)

Από (3) και (4) έχουμε ότι το σημείο Κ δεν ανήκει στην ΓΓ΄, επομένως οι ΑΑ΄, ΒΒ΄ και ΓΓ΄ δεν συντρέχουν.

2η λύση



Τα τμήματα ΑΑ΄, ΒΒ΄ τέμνονται στο Κ.

Φέρνουμε $KH \perp B\Gamma$, $K\Theta \perp A\Gamma$ και $KP \perp AB$.

Το ΚΗΒΡ είναι εγγράψιμο με $H\hat{B}K < K\hat{B}P \Rightarrow$

$\overset{\frown}{KH} < \overset{\frown}{KP} \Rightarrow KH < KP$ (5)

Το ΚΘΑΡ είναι εγγράψιμο με $P\hat{A}K < K\hat{A}\Theta \Rightarrow$

$\overset{\frown}{KP} < \overset{\frown}{K\Theta} \Rightarrow KP < K\Theta$ (6)

Από (5), (6) έχουμε $KH < K\Theta$.

Το ΚΗΓΘ είναι εγγράψιμο με $KH < K\Theta \Rightarrow$

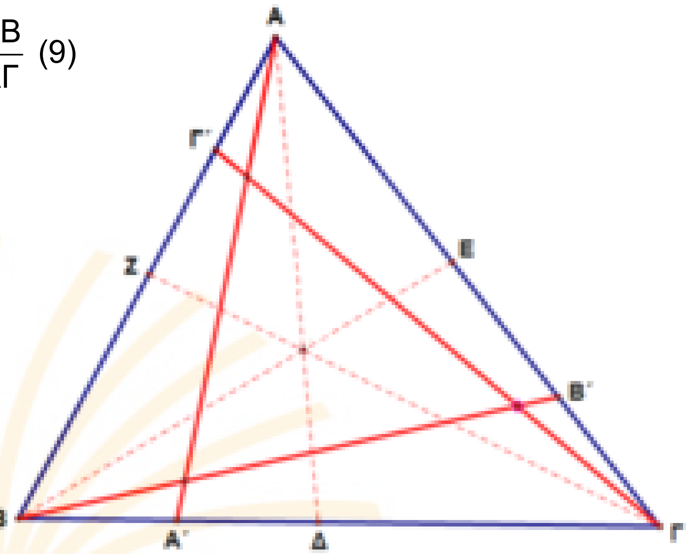
$\overset{\frown}{KH} < \overset{\frown}{K\Theta} \Rightarrow K\hat{\Gamma}H < K\hat{\Gamma}\Theta$ (7)

Είναι $\dfrac{5\hat{\Gamma}}{11} = A\hat{\Gamma}\Gamma' < B\hat{\Gamma}\Gamma' = \dfrac{6\hat{\Gamma}}{11}$ (8)

Από (7) και (8) προκύπτει ότι η ΓΓ΄ δεν διέρχεται από το Κ.

3$^{\eta}$ λύση

Φέρνουμε τις διχοτόμους $A\Delta$, BE και ΓZ του τριγώνου $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$.



Από θεώρημα εσ. διχοτόμου έχουμε $\dfrac{B\Delta}{\Delta\Gamma} = \dfrac{AB}{A\Gamma}$ (9)

Είναι $B\hat{A}A' < B\hat{A}\Delta = \dfrac{\hat{A}}{2}$,

άρα η AA' βρίσκεται εντός της $A\hat{B}\Delta$

και το σημείο A' βρίσκεται εντός του $B\Delta$.

$$\left.\begin{array}{l} BA' < B\Delta \\ A'\Gamma > \Delta\Gamma \end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{BA'}{A'\Gamma} < \dfrac{B\Delta}{\Delta\Gamma} \quad (10)$$

Από (9) και (10) έχουμε $\dfrac{BA'}{A'\Gamma} < \dfrac{AB}{A\Gamma}$ (11)

Όμοια αποδεικνύουμε :

- το σημείο B' βρίσκεται εντός του ΓE και $\dfrac{\Gamma B'}{B'A} < \dfrac{B\Gamma}{AB}$ (12)
- το σημείο Γ' βρίσκεται εντός του AZ και $\dfrac{A\Gamma'}{\Gamma' B} < \dfrac{A\Gamma}{B\Gamma}$ (13)

Από (11), (12) και (13) με πολλαπλασιασμό κατά μέλη έχουμε

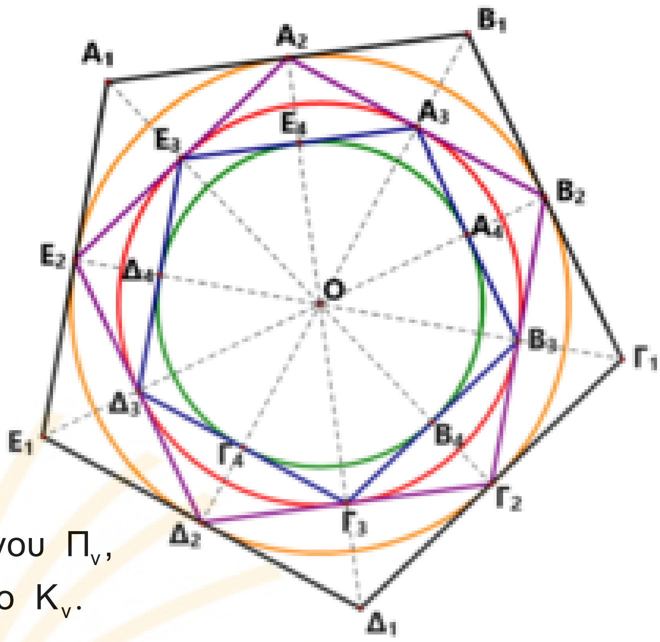
$$\frac{BA'}{A'\Gamma}\cdot\frac{\Gamma B'}{B'A}\cdot\frac{A\Gamma'}{\Gamma' B} < \frac{AB}{A\Gamma}\cdot\frac{B\Gamma}{AB}\cdot\frac{A\Gamma}{B\Gamma} \Rightarrow \frac{BA'}{A'\Gamma}\cdot\frac{\Gamma B'}{B'A}\cdot\frac{A\Gamma'}{\Gamma' B} < 1$$

Αν οι ευθείες AA', BB' και $\Gamma\Gamma'$ διέρχονταν από το ίδιο σημείο

από θεώρημα του Ceva θα ήταν $\dfrac{BA'}{A'\Gamma}\cdot\dfrac{\Gamma B'}{B'A}\cdot\dfrac{A\Gamma'}{\Gamma' B} = 1$.

Επομένως οι ευθείες AA', BB' και $\Gamma\Gamma'$ δεν διέρχονται από το ίδιο σημείο.

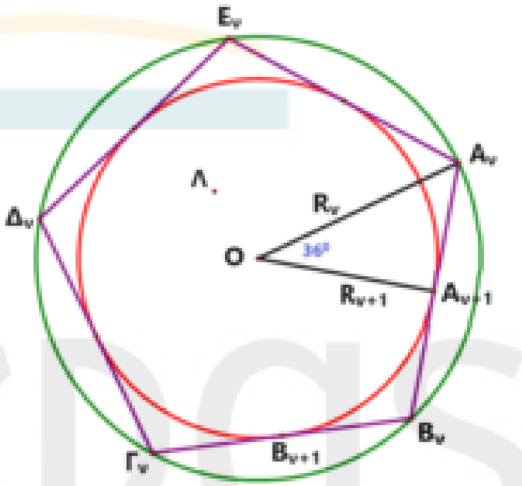
Ζήτημα 3ο



Παρατηρούμε ότι κάθε κύκλος K_ν είναι εγγεγραμμένος στο κανονικό πολύγωνο Π_ν και είναι ο περιγεγραμμένος κύκλος του πολυγώνου $\Pi_{\nu+1}$.

Κάθε κύκλος $K_{\nu+1}$ είναι ομόκεντρος του K_ν άρα όλοι οι κύκλοι έχουν κοινό κέντρο Ο.

Το σημείο Ο είναι εσωτερικό κάθε πενταγώνου Π_ν, αφού κάθε πεντάγωνο Π_ν περιέχει τον κύκλο K_ν.



Στο τρίγωνο $\overset{\Delta}{OA_\nu A_{\nu+1}}$ είναι $\hat{O} = 36^0$ και

$$\frac{R_{\nu+1}}{R_\nu} = \lambda = \sigma\upsilon\nu 36^0 < 1$$

Η ακολουθία των ακτίνων των κύκλων $R_1, R_2, \dots, R_\nu$ είναι μια φθίνουσα γεωμετρική πρόοδος με λόγο $\lambda < 1$ και έχει όριο 0, όταν το ν τείνει στο άπειρο.

Αν υποθέσουμε ότι υπάρχει σημείο Λ διαφορετικό του Ο
που βρίσκεται εντός κάθε κανονικού πενταγώνου, με $(O\Lambda) = \varepsilon > 0$.
Τότε θα υπάρχει μ φυσικός αριθμός, τέτοιος ώστε $R_\mu < (O\Lambda)$.
Επομένως το σημείο Λ βρίσκεται εκτός του κύκλου K_μ
δηλαλή το σημείο Λ βρίσκεται εκτός του κανονικού πενταγώνου $K_{\mu+1}$.

Συμπερασματικά το Ο είναι το μοναδικό κοινό σημείο όλων των πενταγώνων.