ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟΥ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΟΥ 1966
Θέματα Τριγωνομετρίας
ΤΥΠΟΣ Β΄
Σάββατο 10 Σεπτεμβρίου 1966

Ζήτημα 1ο

1ος τρόπος

$$\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu x + \beta\cdot\eta\mu x + \gamma = 0 \overset{\alpha\neq 0}{\Rightarrow} \sigma\upsilon\nu x + \frac{\beta}{\alpha}\cdot\eta\mu x + \frac{\gamma}{\alpha} = 0$$

Για κάθε $\alpha, \beta \neq 0$ υπάρχει γωνία ω με $-\frac{\pi}{2} < \omega < \frac{\pi}{2}$ και $\varepsilon\varphi\omega = \frac{\beta}{\alpha}$.

Η εξίσωση γίνεται $\sigma\upsilon\nu x + \varepsilon\varphi\omega\cdot\eta\mu x + \frac{\gamma}{\alpha} = 0 \Rightarrow \sigma\upsilon\nu x + \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}\cdot\eta\mu x = -\frac{\gamma}{\alpha} = 0 \Rightarrow$

$$\sigma\upsilon\nu\omega\cdot\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu\omega\cdot\eta\mu x = -\frac{\gamma}{\alpha}\cdot\sigma\upsilon\nu\omega \Rightarrow \sigma\upsilon\nu(\omega - x) = -\frac{\gamma}{\alpha}\cdot\sigma\upsilon\nu\omega$$

Η τελευταία για να μην έχει λύση πρέπει και αρκεί $\left|-\frac{\gamma}{\alpha}\cdot\sigma\upsilon\nu\omega\right| > 1 \Rightarrow$

$$\frac{\gamma^2}{\alpha^2}\cdot\sigma\upsilon\nu^2\omega > 1 \Rightarrow \frac{\gamma^2}{\alpha^2}\cdot\frac{1}{1+\varepsilon\varphi^2\omega} > 1 \overset{\varepsilon\varphi\omega = \frac{\beta}{\alpha}}{\Rightarrow} \frac{\gamma^2}{\alpha^2}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2} > 1 \Rightarrow$$

$$\frac{\gamma^2}{\alpha^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{\beta^2}{\alpha^2}} > 1 \Rightarrow \frac{\gamma^2}{\alpha^2+\beta^2} > 1 \Rightarrow \boxed{\gamma^2 > \alpha^2 + \beta^2}$$

2ος τρόπος

$$\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu x + \beta\cdot\eta\mu x + \gamma = 0 \overset{\alpha\neq 0}{\Rightarrow} \sigma\upsilon\nu x + \frac{\beta}{\alpha}\cdot\eta\mu x + \frac{\gamma}{\alpha} = 0$$

Για κάθε $\alpha, \beta \neq 0$ υπάρχει γωνία θ με $0 < \theta < \pi$ και $\sigma\varphi\theta = \frac{\beta}{\alpha}$.

Η εξίσωση γίνεται $\sigma\upsilon\nu x + \sigma\varphi\theta\cdot\eta\mu x + \frac{\gamma}{\alpha} = 0 \Rightarrow \sigma\upsilon\nu x + \frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{\eta\mu\theta}\cdot\eta\mu x = -\frac{\gamma}{\alpha} = 0 \Rightarrow$

$$\eta\mu\theta\cdot\sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu\theta\cdot\eta\mu x = -\frac{\gamma}{\alpha}\cdot\eta\mu\theta \Rightarrow \eta\mu(\theta + x) = -\frac{\gamma}{\alpha}\cdot\eta\mu\theta$$

Η τελευταία για να μην έχει λύση πρέπει και αρκεί $\left|-\frac{\gamma}{\alpha}\cdot\eta\mu\theta\right| > 1 \Rightarrow$

$$\frac{\gamma^2}{\alpha^2}\cdot\eta\mu^2\theta > 1 \Rightarrow \frac{\gamma^2}{\alpha^2}\cdot\frac{1}{1+\sigma\varphi^2\theta} > 1 \overset{\sigma\varphi\omega = \frac{\beta}{\alpha}}{\Rightarrow} \frac{\gamma^2}{\alpha^2}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2} > 1 \Rightarrow$$

$$\frac{\gamma^2}{\alpha^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{\beta^2}{\alpha^2}} > 1 \Rightarrow \frac{\gamma^2}{\alpha^2+\beta^2} > 1 \Rightarrow \boxed{\gamma^2 > \alpha^2 + \beta^2}$$

3^{ος} τρόπος

Είναι $συνx = \dfrac{1 - εφ^2\dfrac{x}{2}}{1 + εφ^2\dfrac{x}{2}}$ και $ημx = \dfrac{2εφ\dfrac{x}{2}}{1 + εφ^2\dfrac{x}{2}}$.

Άρα $α \cdot συνx + β \cdot ημx + γ = 0 \;\Rightarrow$

$$α \cdot \frac{1 - εφ^2\dfrac{x}{2}}{1 + εφ^2\dfrac{x}{2}} + β \cdot \frac{2εφ\dfrac{x}{2}}{1 + εφ^2\dfrac{x}{2}} + γ = 0 \;\Rightarrow$$

$$α \cdot \left(1 - εφ^2\frac{x}{2}\right) + 2β \cdot εφ\frac{x}{2} + γ \cdot \left(1 + εφ^2\frac{x}{2}\right) = 0 \;\Rightarrow$$

$$α - α \cdot εφ^2\frac{x}{2} + 2β \cdot εφ\frac{x}{2} + γ + γ \cdot εφ^2\frac{x}{2} = 0 \;\Rightarrow$$

$$(γ - α) \cdot εφ^2\frac{x}{2} + 2β \cdot εφ\frac{x}{2} + (γ + α) = 0$$

Στην τελευταία αν θέσουμε $εφ\dfrac{x}{2} = ω$ γράφεται :

$(γ - α) \cdot ω^2 + 2β \cdot ω + (γ + α) = 0$

για να μην έχει λύση πρέπει και αρκεί $Δ < 0 \;\Rightarrow$

$(2β)^2 - 4(γ - α)(γ + α) < 0 \;\Rightarrow$

$4β^2 - 4(γ^2 - α^2) < 0 \;\overset{:4}{\Rightarrow}$

$β^2 - γ^2 + α^2 < 0 \;\Rightarrow$

$\boxed{\boldsymbol{α^2 + β^2 < γ^2}}$

Για να έχει η εξίσωση $α \cdot συνx + β \cdot ημx + γ = 0$

λύσεις της μορφής $(2κ + 1)π$, με κ ακέραιο θα πρέπει :

$α \cdot συν(2κ + 1)π + β \cdot ημ(2κ + 1)π + γ = 0 \;\Rightarrow$

$α \cdot (-1) + β \cdot 0 + γ = 0 \;\Leftrightarrow$

$α - γ = 0 \;\Leftrightarrow$

$\boxed{\boldsymbol{α = γ}}$.

Ζήτημα 2ο

$$\frac{1}{2}(\sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu y) \le \sigma\upsilon\nu\frac{1}{2}(x+y) \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\frac{x+y}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{x-y}{2} \le \sigma\upsilon\nu\frac{x+y}{2} \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu\frac{x+y}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{x-y}{2} - \sigma\upsilon\nu\frac{x+y}{2} \le 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\frac{x+y}{2}\cdot\left(\sigma\upsilon\nu\frac{x-y}{2} - 1\right) \le 0 \quad (2)$$

Η (2) ισχύει διότι :

- $$\left.\begin{array}{l} -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2} \\ -\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2} \end{array}\right\} \overset{(+)}{\Rightarrow} -\pi \le x+y \le \pi \Rightarrow -\frac{\pi}{2} \le \frac{x+y}{2} \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\frac{x+y}{2} \ge 0$$
- $$-1 \le \sigma\upsilon\nu\frac{x-y}{2} \le 1 \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\frac{x-y}{2} - 1 \le 0$$

Το "=" ισχύει όταν $\sigma\upsilon\nu\frac{x+y}{2} = 0$ ή $\sigma\upsilon\nu\frac{x-y}{2} = 1$.

▹ $$\sigma\upsilon\nu\frac{x+y}{2} = 0 \overset{-\frac{\pi}{2} \le \frac{x+y}{2} \le \frac{\pi}{2}}{\Rightarrow} \frac{x+y}{2} = \pm\frac{\pi}{2} \Rightarrow x+y = \pm\pi \underset{-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}}{\overset{-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}}{\Rightarrow}} \mathbf{x = y = \pm\frac{\pi}{2}}$$

▹ $$\left.\begin{array}{l} -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2} \\ -\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2} \\ -\frac{\pi}{2} \le -y \le \frac{\pi}{2} \end{array}\right\} \overset{(+)}{\Rightarrow} -\pi \le x-y \le \pi \Rightarrow -\frac{\pi}{2} \le \frac{x-y}{2} \le \frac{\pi}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu\frac{x-y}{2} = 1 \overset{-\frac{\pi}{2} \le \frac{x-y}{2} \le \frac{\pi}{2}}{\Rightarrow} \frac{x-y}{2} = 0 \Leftrightarrow x-y = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x = y}$$

Σε κάθε περίπτωση το "=" ισχύει όταν $\boxed{\mathbf{x = y}}$.

$$\frac{1}{2}(\sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu y) \le \sigma\upsilon\nu\frac{1}{2}(x+y) \underset{y=\Gamma}{\overset{x=B}{\Leftrightarrow}} \frac{\sigma\upsilon\nu B + \sigma\upsilon\nu\Gamma}{2} \le \sigma\upsilon\nu\frac{B+\Gamma}{2} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\sigma\upsilon\nu B + \sigma\upsilon\nu\Gamma}{2} \le \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}\right) \Leftrightarrow \frac{\sigma\upsilon\nu B + \sigma\upsilon\nu\Gamma}{2} \le \eta\mu\frac{A}{2} \overset{\cdot 4}{\Leftrightarrow}$$

$$2\sigma\upsilon\nu B + 2\sigma\upsilon\nu\Gamma \le 4\cdot\eta\mu\frac{A}{2} \Leftrightarrow \frac{2R\sigma\upsilon\nu B + 2R\sigma\upsilon\nu\Gamma}{R} \le 4\cdot\eta\mu\frac{A}{2} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\sigma_2 + \sigma_3}{R} \le 4\cdot\eta\mu\frac{A}{2}$$

Το "=" ισχύει όταν $x = y$, δηλαδή όταν $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ (ισοσκελές τρίγωνο).

Ζήτημα 3ο

$$\frac{συν2x + συνx - 1}{συν2x} > 2 \iff \frac{συν2x + συνx - 1}{συν2x} - 2 > 0 \iff$$

$$\frac{συν2x + συνx - 1 - 2συν2x}{συν2x} > 0 \iff \frac{συνx - 1 - συν2x}{συν2x} > 0 \iff$$

$$(συνx - 1 - συν2x)\cdot συν2x > 0 \iff [συνx - 1 - (2συν^2x - 1)]\cdot(2συν^2x - 1) > 0 \iff$$

$$(συνx - 2συν^2x)\cdot 2\cdot\left(συν^2x - \frac{1}{2}\right) > 0 \iff$$

$$-4\cdot συνx\cdot\left(συνx - \frac{1}{2}\right)\cdot\left(συνx - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(συνx + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) > 0 \iff$$

$$συνx\cdot\left(συνx - \frac{1}{2}\right)\cdot\left(συνx - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(συνx + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) < 0$$

Για $0 < x < 2π$:

- $συνx = 0 \Rightarrow x = \frac{π}{2}$ ή $x = \frac{3π}{2}$
- $συνx - \frac{1}{2} = 0 \iff συνx = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{π}{3}$ ή $x = \frac{5π}{3}$
- $συνx - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \iff συνx = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \frac{π}{4}$ ή $x = \frac{7π}{4}$
- $συνx + \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \iff συνx = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \frac{3π}{4}$ ή $x = \frac{5π}{4}$

x	0		$\frac{π}{4}$		$\frac{π}{3}$		$\frac{π}{2}$		$\frac{3π}{4}$		$\frac{5π}{4}$		$\frac{3π}{2}$		$\frac{5π}{3}$		$\frac{7π}{4}$		$2π$
συνx		+		+		+	0	-		-		-	0	+		+		+	
$συνx - \frac{1}{2}$		+		+	0	-		-		-		-		-	0	+		+	
$συνx - \frac{\sqrt{2}}{2}$		+	0	-		-		-		-		-		-		-	0	+	
$συνx + \frac{\sqrt{2}}{2}$		+		+		+		+	0	-	0	+		+		+		+	
Γινόμενο		+	0	-	0	+	0	-	0	+	0	-	0	+	0	-	0	+	

Επομένως : $\frac{π}{4} < x < \frac{π}{3}$ ή $\frac{π}{2} < x < \frac{3π}{4}$ ή $\frac{5π}{4} < x < \frac{3π}{2}$ ή $\frac{5π}{3} < x < \frac{7π}{4}$.