ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟΥ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΟΥ 1966

Θέματα Τριγωνομετρίας

ΤΥΠΟΣ Β΄

Σάββατο 10 Σεπτεμβρίου 1966

Ζήτημα 1ον (Θεωρία)

Εάν α, β, γ είναι πραγματικοί αριθμοί διάφοροι του μηδενός, να ευρεθή η συνθήκη, υπό την οποίαν η εξίσωσις ασυνx + βημx + γ = 0 δεν επιδέχεται λύσιν. Υπό ποίαν συνθήκην διά τα α, β, γ η εξίσωσις δέχεται λύσεις της μορφής x = (2κ + 1)π, όπου κ είναι ακέραιος;

Ζήτημα 2ον

Χρησιμοποιούντες γνωστόν σας τύπον, αποδείξατε ότι αν
$-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ και $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$, τότε ισχύει η σχέσις :
$\frac{1}{2}(\text{συν}x + \text{συν}y) \le \text{συν}\frac{1}{2}(x + y)$ (1).
Εις ποίαν περίπτωσιν ισχύει η ισότης;
Λάβετε τώρα ως γνωστόν σας, ότι αν Η το ορθόκεντρο τριγώνου ΑΒΓ, τότε τα μήκη σ_2, σ_3 των ευθυγράμμων τμημάτων ΗΒ, ΗΓ
δίδονται υπό των τύπων : $\begin{cases} \sigma_2 = 2R\cdot\text{συν}B \\ \sigma_3 = 2R\cdot\text{συν}\Gamma \end{cases}$, όπου R το μήκος της ακτίνας του περιγεγγραμμένου εις το τρίγωνον ΑΒΓ κύκλου.
Τη βοηθεία της σχέσεως (1) δείξατε, ότι εις κάθε τρίγωνον ισχύει η σχέσις : $\frac{\sigma_2 + \sigma_3}{R} \le 4\cdot\text{ημ}\frac{A}{2}$.
Εις ποίαν περίπτωσιν ισχύει η ισότης;

Ζήτημα 3ον

Να ορισθούν αι τιμαί του τόξου x αι περιεχόμεναι μεταξύ 0 και 2π, αι οποίαι επαληθεύουν την ανισότητα : $\frac{\text{συν}2x + \text{συν}x - 1}{\text{συν}2x} > 2$.