ΓΕΝΙΚΕΣ ΕΙΣΙΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 1967
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
(Άλγεβρα – Γεωμετρία - Τριγωνομετρία)
ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟΣ ΚΥΚΛΟΣ
Τρίτη 5 Σεπτεμβρίου 1967

Άλγεβρα

Ζήτημα 1ον

Ἕκαστος ὅρος ἀριθμητικῆς προόδου ἰσοῦται μὲ τὸν πρῶτον ὅρον αὐτῆς, αὐξηθέντα κατὰ τὸ γινόμενον τῆς διαφορᾶς ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τοῦ πλήθους τῶν προηγουμένων αὐτοῦ ὅρων.

Ἐὰν ν παριστάνῃ τὸ πλῆθος τῶν ὅρων της καὶ τ τὸν ἔχοντα τὴν νιοστὴν τάξιν ὅρον αὐτῆς, οἱ προηγούμενοι τούτου θὰ εἶναι ν−1 τὸ πλῆθος καὶ θὰ ἔχωμεν $\tau=\alpha+(\nu-1)\omega$

Ἐὰν α καὶ τ εἶναι οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ καὶ ν τὸ πλῆθος τῶν παρεμβληθησομένων, τὸ πλῆθος τῶν ὅρων τῆς σχηματισθησομένης προόδου θὰ εἶναι ν+2, ὁ πρῶτος ὅρος α καὶ ὁ τελευταῖος τ. Ἑπομένως θὰ ἔχωμεν $\tau=\alpha+(\nu+1)\omega$, ἂν τὸ ω παριστάνῃ τὴν διαφορὰν τῆς προόδου. Ἑπομένως ἐκ τῆς ἰσότητος αὐτῆς εὑρίσκομεν $\omega=\dfrac{\tau-\alpha}{\nu+1}$

Τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων ἀριθμητικῆς τινος προόδου μὲ ὡρισμένον πλῆθος ὅρων ἰσοῦται μὲ τὸ ἡμιάθροισμα τῶν ἄκρων ὅρων της ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τοῦ πλήθους τῶν ὅρων αὐτῆς.

$$\Sigma=\frac{(\alpha+\tau)\nu}{2} \quad \text{ἢ} \quad \Sigma=\frac{2\alpha+(\nu-1)\omega}{2}\cdot\nu.$$

Ζήτημα 2ον

$$\Sigma_\nu=\frac{[2\alpha_1+(\nu-1)\cdot\omega]\cdot\nu}{2} \underset{\omega=\frac{5}{8}}{\overset{\substack{\alpha_1=3\\ \Sigma_\nu=136}}{\Rightarrow}} 136=\frac{\left[2\cdot 3+(\nu-1)\cdot\frac{5}{8}\right]\cdot\nu}{2} \Leftrightarrow$$

$$272=\left(6+\frac{5\nu-5}{8}\right)\cdot\nu \Leftrightarrow 272=\frac{43+5\nu}{8}\cdot\nu \Leftrightarrow 2176=(43+5\nu)\cdot\nu \Leftrightarrow$$

$$2176=43\nu+5\nu^2 \Leftrightarrow 5\nu^2+43\nu-2176=0$$

$$\Delta=43^2-4\cdot 5\cdot(-2176)=1849+43520=45369=213^2$$

$$\nu=\frac{-43\pm 213}{10} \Rightarrow \nu=17 \text{ (δεκτή) ή } \nu=-\frac{128}{5} \text{ (απορρίπτεται)}$$

Επομένως $\boldsymbol{\nu=17}$

$$\tau=\alpha_1+(\nu-1)\cdot\omega \underset{\omega=\frac{5}{8}}{\overset{\substack{\alpha_1=3\\ \nu=17}}{\Rightarrow}} \tau=3+16\cdot\frac{5}{8} \Leftrightarrow \tau=3+10 \Leftrightarrow \boldsymbol{\tau=13}$$

Τριγωνομετρία

Ζήτημα 1ον

Πρόβλημα. **Νὰ εὑρεθῶσιν οἱ ἄλλοι τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ μιᾶς ὀξείας γωνίας ω, ἂν γνωρίζωμεν τὴν ἐφω.**

Λύσις α΄) Εὕρεσις τοῦ ἡμω καὶ τοῦ συνω. Παρατηροῦμεν ὅτι οἱ δύο οὗτοι τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ εἶναι οἱ μόνοι ἄγνωστοι εἰς τὰς ἰσότητας:

$$\text{ἡμ}^2\omega + \text{συν}^2\omega = 1, \qquad \text{ἐφ}\omega = \frac{\text{ἡμ}\omega}{\text{συν}\omega}.$$

Πρέπει λοιπὸν νὰ λύσωμεν τὸ σύστημα αὐτῶν. Πρὸς τοῦτο ἐκ τῆς β΄ εὑρίσκομεν ἡμω = συνω · ἐφω (1)

Ἕνεκα δὲ ταύτης ἡ α΄ γίνεται:

$$\text{συν}^2\omega \cdot \text{ἐφ}^2\omega + \text{συν}^2\omega = 1 \quad \text{ἢ} \quad (1 + \text{ἐφ}^2\omega)\cdot \text{συν}^2\omega = 1.$$

Ἐκ ταύτης δὲ εὑρίσκομεν κατὰ σειράν: καὶ

$$\text{συν}^2\omega = \frac{1}{1+\text{ἐφ}^2\omega} \tag{16}$$

καὶ

$$\text{συν}\omega = \frac{1}{\sqrt{1+\text{ἐφ}^2\omega}}, \tag{17}$$

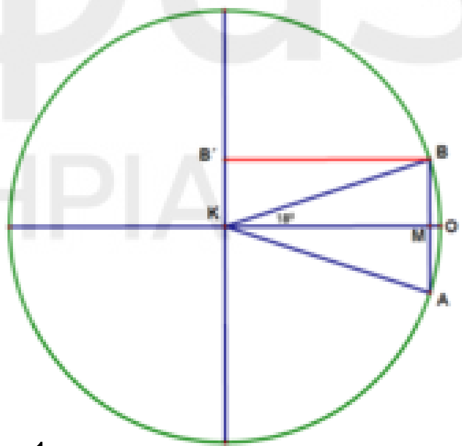
Ἐκ ταύτης δὲ καὶ τῆς ἀνωτέρω (1) εὑρίσκομεν ὅτι:

$$\text{ἡμ}\omega = \frac{\text{ἐφ}\,\omega}{\sqrt{1+\text{ἐφ}^2\omega}} \tag{18}$$

β΄) Εὕρεσις τῆς σφω. Ἐκ τῆς **ἐφω · σφω = 1** εὑρίσκομεν ἀμέσως ὅτι: $\text{σφ}\omega = \dfrac{1}{\text{ἐφ}\omega}$.

γ΄) Ἐπειδὴ $\text{τεμ}\omega = \dfrac{1}{\text{συν}\omega}$ καὶ $\text{στεμ}\omega = \dfrac{1}{\text{ημ}\omega}$, θὰ ἔχωμεν, λόγῳ τῶν τύπων (17) καὶ (18) τοὺς τύπους: $\text{τεμ}\omega = \sqrt{1+\text{εφ}^2\omega}$, $\quad \text{στεμ}\omega = \dfrac{\sqrt{1+\text{εφ}^2\omega}}{\text{εφ}\omega}$.

Ζήτημα 2ον



Σε τριγωνομετρικό κύκλο παίρνουμε τόξο AB μέτρου 36^0 με μέσο το O.

Η πλευρά AB είναι πλευρά κανονικού δεκαγώνου,

άρα $AB = \lambda_{10} = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ και

- $\text{ημ}18^0 = KB΄ = MB = \dfrac{AB}{2} \Rightarrow \boxed{\text{ημ}18^0 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}}$

- $\text{ημ}^2 18^0 + \text{συν}^2 18^0 = 1 \Leftrightarrow \left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}\right)^2 + \text{συν}^2 18^0 = 1 \Leftrightarrow$

$$\frac{6-2\sqrt{5}}{16} + \text{συν}^2 18^0 = 1 \Leftrightarrow \text{συν}^2 18^0 = \frac{10+2\sqrt{5}}{16} \overset{\text{συν}18^0>0}{\Rightarrow} \boxed{\text{συν}18^0 = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}}$$

- $\varepsilon\varphi 18^0 = \dfrac{\eta\mu 18}{\sigma\upsilon\nu 18^0} = \dfrac{\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}}{\dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}} \Rightarrow \boxed{\mathbf{\varepsilon\varphi 18^0 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}}}$

- $\sigma\varphi 18^0 = \dfrac{1}{\varepsilon\varphi 18^0} \Rightarrow \boxed{\mathbf{\sigma\varphi 18^0 = \dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{-1+\sqrt{5}}}}$

- $\tau\varepsilon\mu 18^0 = \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu 18^0} = \dfrac{1}{\dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}} = \dfrac{4}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} = \dfrac{4\cdot\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}\cdot\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$

$$= \frac{4\cdot\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{100-20}} = \frac{4\cdot\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4\cdot\sqrt{5}} \Rightarrow \boxed{\mathbf{\tau\varepsilon\mu 18^0 = \frac{4}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}}}}$$

- $\sigma\tau\varepsilon\mu 18^0 = \dfrac{1}{\eta\mu 18^0} = \dfrac{1}{\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}} = \dfrac{4}{\sqrt{5}-1} = \dfrac{4\cdot\left(\sqrt{5}+1\right)}{\left(\sqrt{5}-1\right)\cdot\left(\sqrt{5}+1\right)}$

$$= \frac{4\cdot\left(\sqrt{5}+1\right)}{4} \Rightarrow \boxed{\mathbf{\sigma\tau\varepsilon\mu 18^0 = \sqrt{5}+1 = \frac{4}{\sqrt{5}-1}}}$$

Γεωμετρία

Ζήτημα 1ον

Αν K, Λ τα κέντρα, R, ρ οι ακτίνες των κύκλων αντίστοιχα και $\delta = K\Lambda$ η διάκεντρος τότε :

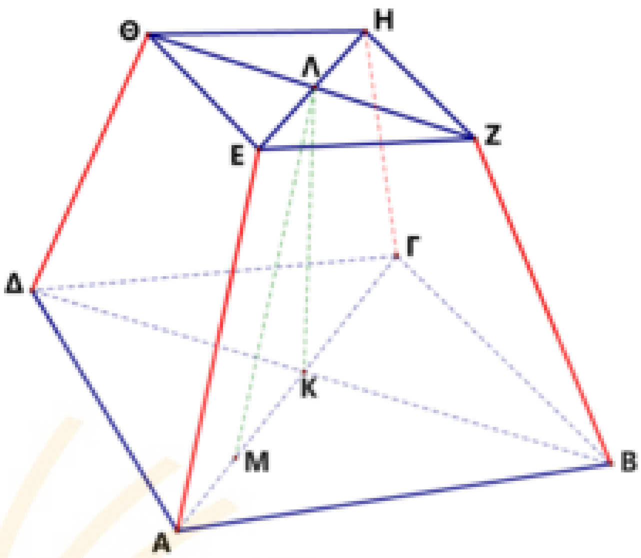
- Αν $R \neq \rho$

Οι κύκλοι βρίσκονται ο ένας εκτός του άλλου	$\delta > R + \rho$
Οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά	$\delta = R + \rho$
Οι κύκλοι τέμνονται σε δύο σημεία	$\lvert R - \rho\rvert < \delta < R + \rho$
Οι κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά	$\delta = \lvert R - \rho\rvert$
Ο ένας κύκλος βρίσκεται εντός του άλλου	$\delta < \lvert R - \rho\rvert$

- Αν $R = \rho$

Οι κύκλοι βρίσκονται ο ένας εκτός του άλλου	$\delta > 2R$
Οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά	$\delta = 2R$
Οι κύκλοι τέμνονται σε δύο σημεία	$0 < \delta < 2R$
Οι κύκλοι ταυτίζονται	$\delta = 0$

Ζήτημα 2ον



Το εμβαδόν της μεγάλης βάσης είναι

$B = (ΑΒΓΔ) = 10^2 = 100$ μ^2 (1)

Το ΑΒΖΕ είναι ισοσκελές τραπέζιο με

ΑΒ = 10, ΑΕ = ΒΖ = 5 και ύψος ΕΕ΄ = 4.

Πυθαγόρειο θεώρημα στο $\overset{\Delta}{ΑΕΕ'}$:

$ΑΕ'^2 = ΑΕ^2 - ΕΕ'^2 = 5^2 - 4^2 = 9$,

άρα ΑΕ΄ = 3 και όμοια ΒΖ΄ = 3.

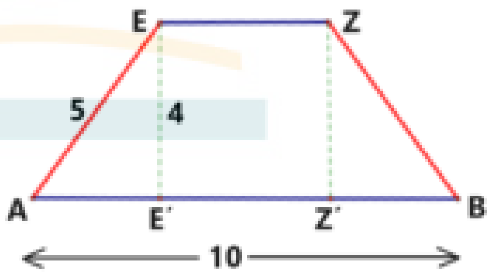
ΕΖ = Ε΄Ζ΄ = ΑΒ - ΑΕ΄ - ΒΖ΄ = 10 - 3 - 3 = 4

Το εμβαδόν της μικρής βάσης είναι

$β = (ΕΖΗΘ) = 4^2 = 16$ μ^2 (2)

Αν Κ, Λ τα κέντρα των βάσεων

το ΚΛ είναι το ύψος υ της κόλουρης πυραμίδας.



Στο τετράγωνο ΑΒΓΔ είναι $δ = α\sqrt{2}$, άρα

$ΑΓ = 10\sqrt{2} \Rightarrow ΑΚ = \frac{ΑΓ}{2} = 5\sqrt{2}$.

Όμοια στο τετράγωνο ΕΖΗΘ είναι $ΕΗ = 4\sqrt{2}$,

άρα $ΕΛ = \frac{ΕΗ}{2} = 2\sqrt{2}$.

Στο ΑΕΛΚ φέρουμε ΚΜ//ΑΕ.

Το ΑΕΛΜ είναι παραλληλόγραμμο με ΑΕ = ΛΜ = 5

και $ΑΜ = ΕΛ = 2\sqrt{2}$, άρα $ΚΜ = ΑΚ - ΑΜ = 5\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$.

Πυθαγόρειο θεώρημα στο $\overset{\Delta}{ΚΛΜ}$: $ΚΛ^2 = ΛΜ^2 - ΚΜ^2 = 5^2 - \left(3\sqrt{2}\right)^2 = 7$,

άρα $υ = ΚΛ = \sqrt{7}$ μ. (3)

$$V = \frac{1}{3}\cdot(B + \sqrt{β\cdot B} + β)\cdot υ \overset{(1),(2)}{\underset{(3)}{\Rightarrow}}$$

$$V = \frac{1}{3}\cdot(100 + \sqrt{16\cdot 100} + 16)\cdot\sqrt{7} \Leftrightarrow$$

$$V = \frac{1}{3}\cdot(116 + \sqrt{1600})\cdot\sqrt{7} \Leftrightarrow$$

$$V = \frac{1}{3}\cdot(116 + 40)\cdot\sqrt{7} \Leftrightarrow$$

$$V = \frac{1}{3}\cdot 156\cdot\sqrt{7} \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\mathbf{V = 52\cdot\sqrt{7}\ μ^3}}$$