ΓΕΝΙΚΕΣ ΕΙΣΙΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 1968
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
(Άλγεβρα – Γεωμετρία - Τριγωνομετρία)
ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟΣ ΚΥΚΛΟΣ
Τρίτη 10 Σεπτεμβρίου 1968
Άλγεβρα

Ζήτημα 1ον

Ἄθροισμα καὶ γινόμενον τῶν ριζῶν x_1, x_2 τῆς $f(x) \equiv \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0, \alpha, \beta, \gamma \in R$.

Ἐκ τῶν ἐκφράσεων τῶν ριζῶν τῆς $f(x) = 0$.

$$x_1 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha}, \quad x_2 = \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$$

λαμβάνομεν : $x_1 + x_2 = \dfrac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} + \dfrac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = -\dfrac{\beta}{\alpha}$

$$x_1 \cdot x_2 = \left(\frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha}\right)\left(\frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha}\right) = \frac{(-\beta)^2 - (\sqrt{\Delta})^2}{4\alpha^2} = \frac{\gamma}{\alpha}$$

Οὕτως ἔχομεν :

Θεμελιώδεις σχέσεις συντελεστῶν καὶ ριζῶν x_1, x_2 τῆς $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$
$S_1 = x_1 + x_2 = -\dfrac{\beta}{\alpha}, \quad P_1 = x_1 x_2 = \dfrac{\gamma}{\alpha}$

Ζήτημα 2ον

1η λύση

Είναι $\rho_1 + \rho_2 = \lambda + 1$ (1) και $\rho_1 \cdot \rho_2 = \lambda$ (2)

$$\rho_1^2 + \rho_2^2 = 5 \Leftrightarrow (\rho_1 + \rho_2)^2 - 2\rho_1 \cdot \rho_2 = 5 \overset{(1)}{\underset{(2)}{\Leftrightarrow}} (\lambda + 1)^2 - 2\lambda = 5 \Leftrightarrow$$

$$\lambda^2 \cancel{+2\lambda} + 1 \cancel{-2\lambda} = 5 \Leftrightarrow \lambda^2 = 4 \Leftrightarrow \boxed{\lambda = \pm 2}$$

2η λύση

Η εξίσωση έχει διακρίνουσα $\Delta = (\lambda + 1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \lambda = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$

$$\rho_{1,2} = \frac{\lambda + 1 \pm \sqrt{(\lambda - 1)^2}}{2} = \frac{\lambda + 1 \pm (\lambda - 1)}{2} = \begin{cases} \lambda \\ 1 \end{cases}$$

$$\rho_1^2 + \rho_2^2 = 5 \overset{\rho_1 = \lambda}{\underset{\rho_2 = 1}{\Leftrightarrow}} \lambda^2 + 1 = 5 \Leftrightarrow \lambda^2 = 4 \Leftrightarrow \boxed{\lambda = \pm 2}$$

3η λύση

Η εξίσωση γίνεται $x^2 - \lambda x - x + \lambda = 0 \Leftrightarrow x \cdot (x - \lambda) - (x - \lambda) = 0 \Leftrightarrow$

$(x - \lambda) \cdot (x - 1) = 0 \Leftrightarrow x - \lambda = 0$ ή $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \lambda$ ή $x = 1$.

$$\rho_1^2 + \rho_2^2 = 5 \overset{\rho_1 = \lambda}{\underset{\rho_2 = 1}{\Leftrightarrow}} \lambda^2 + 1 = 5 \Leftrightarrow \lambda^2 = 4 \Leftrightarrow \boxed{\lambda = \pm 2}$$

Γεωμετρία

Ζήτημα 1ον

Σχετικαί θέσεις ἐπιπέδων καί εὐθειῶν εἰς τόν χῶρον.

α) Δύο ἐπίπεδα p καί q

ἤ 1ον θά ἔχουν ὅλα των τά σημεῖα κοινά καί θά συμπίπτουν:

$$p \cap q = p = q$$

(πρός τοῦτο ἀρκεῖ νά ἔχουν κοινά τρία σημεῖα μή κείμενα ἐπ' εὐθείας),

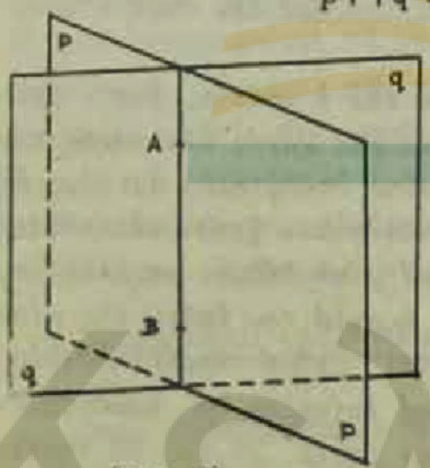
ἤ 2ον θά ἔχουν κοινά τά σημεῖα μιᾶς εὐθείας καί μόνον:

$$p \cap q = \text{εὐθεῖα}$$

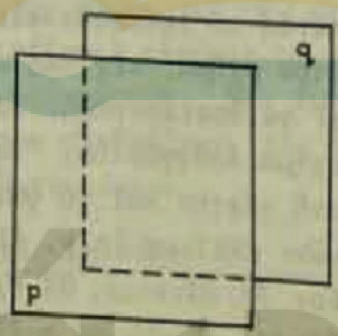
(πρός τοῦτο ἀρκεῖ νά μή συμπίπτουν καί νά ἔχουν ἕνα τουλάχιστον κοινόν σημεῖον , σχ. 3) ,

ἤ 3ον δέν θά ἔχουν κανένα κοινόν σημεῖον (σχ. 4):

$$p \cap q = \emptyset .$$

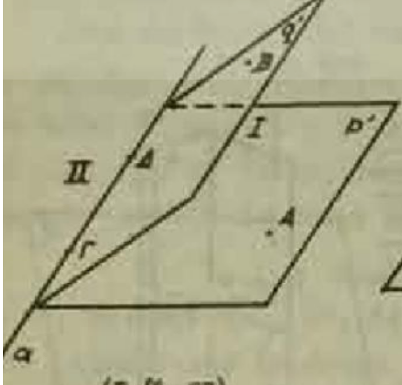


(Σχέδ. 3)

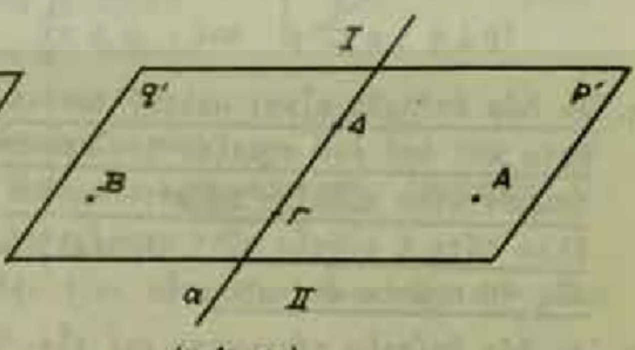


(Σχέδ. 4)

β) Ἄς θεωρήσωμεν τώρα τό σχῆμα $S = p' \cup q'$ πού ἀποτελεῖται ἀπό δύο μή συμπίπτοντα ἡμιεπίπεδα p' καί q' μέ κοινήν ἀκμήν, ἔστω τήν εὐθεῖαν α (σχ. 23 καί 24). (Ἠμποροῦμεν νά πραγματοποιήσωμεν ὑλικῶς ἕνα μέρος τοῦ σχήματος S, ἄν, ἀφοῦ διπλώσωμεν ἕνα λεπτόν χαρτόνι , ἀνοίξωμεν ὀλιγώτερον ἤ περισσό-



(Σχέδ. 23)



(Σχέδ. 24)

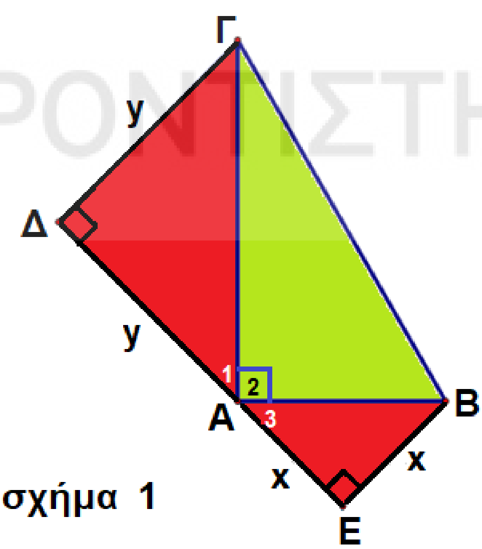
τερον τά δύο μέρη τοῦ χαρτονιοῦ τά ἑκατέρωθεν τῆς εὐθείας τοῦ τσακίσματος). Τά σημεῖα τοῦ χώρου πού δέν ἀνήκουν εἰς τό σχῆμα S, κατανέμονται εἰς δύο ξένα μεταξύ τους σημειοσύνολα I καί II μέ τήν ἀκόλουθον ἰδιότητα:

Δύο ὁποιαδήποτε σημεῖα τοῦ I ἤ δύο ὁποιαδήποτε τοῦ II ἠμποροῦν νά συνδεθοῦν μέ μίαν συνεχῆ (δηλαδή ὄχι διακεκομμένην) γραμμήν ἡ ὁποία νά μή συναντᾶ τό S, ἐνῶ κάθε γραμ- . , πού συνδέει ἕνα σημεῖον τοῦ I μέ ἕνα σημεῖον τοῦ II συναντᾶ κατ' ἀνάγκην τό S. Κατά ταῦτα τό σχῆμα S εἶναι κοινόν σύνορον τῶν σημειοσυνόλων I καί II. Τό καθένα τώρα ἀπό τά δύο αὐτά σημειοσύνολα μαζί μέ τό σύνορόν του S λέγεται δίεδρος γωνία μέ ἕδρας τά ἡμιεπίπεδα p' καί q' καί μέ ἀκμήν τήν εὐθεῖαν α. Ὅταν αἱ δύο ἕδραι δέν περιέχωνται εἰς τό ἴδιον ἐπίπεδον (σχ. 23), ἡ μία ἀπό τάς δύο διέδρους γωνίας εἶναι κυρτόν σημειοσύνολον καί λέγεται κυρτή δίεδρος, ἡ ἄλλη εἶναι ἕνα μή κυρτόν σημειοσύνολον καί λέγεται μή κυρτή δίεδρος. Ὅταν αἱ δύο ἕδραι περιέχωνται εἰς τό ἴδιον ἐπίπεδον (σχ. 24), τότε αἱ δύο δίεδροι γωνίαι εἶναι ἀμφότεραι κυρτά σημειοσύνολα καί συμπίπτουν ἀντιστοίχως μέ τού[ς] δύο ἡμιχώρους (βλ. § 1.3,β) οἱ ὁποῖοι ὁρίζονται ἀπό τό ἐπίπεδον, λέγονται δέ ἀποπλατυσμέναι δίεδροι.

Μία δίεδρος (σχ. 23, 24) μέ ἀκμήν τήν εὐθεῖαν α, πού ὁρίζεται ἀπό τά σημεῖα Γ, Δ, καί μέ ἕδρας τά ἡμιεπίπεδα p' καί q', πού περιέχουν ἀντιστοίχως τά μή κείμενα ἐπί τῆς α σημεῖα A καί B, θά συμβολίζεται μέ ἕναν ἀπό τούς ἀκολούθους τρόπους:

$\widehat{p'\alpha q'}$, $\widehat{p'(\Gamma\Delta)q'}$, $\widehat{A(\Gamma\Delta)B}$, $\widehat{A\alpha B}$.

Ζήτημα 2ον



σχήμα 1

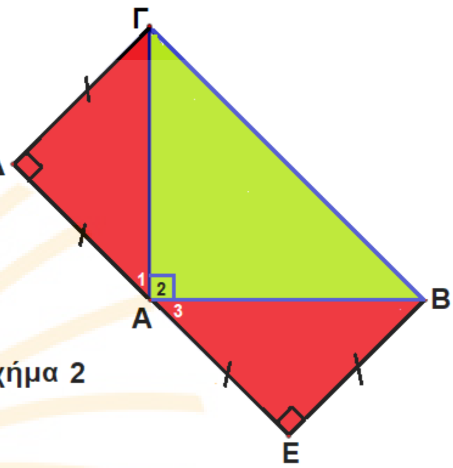
α) Τα $\overset{\Delta}{ABE}$ και $\overset{\Delta}{A\Gamma\Delta}$ είναι ορθογώνια και ισοσκελή

άρα $\hat{A}_1 = \hat{A}_3 = 45^0$

Είναι $\hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \hat{A}_3 = 180^0$, άρα τα σημεία Γ, Α και Δ είναι συνευθειακά και το σχήμα που προκύπτει είναι τετράπλευρο.

Είναι $\Gamma\Delta \perp \Delta E$ και $EB \perp \Delta E$, άρα $\Gamma\Delta \,//\, EB$.

- αν $AB = A\Gamma$, τότε $\Gamma\Delta = EB$ και το ΒΓΔΕ είναι παραλληλόγραμμο και επειδή $\hat{\Delta} = \hat{E} = 90^0$, θα είναι **ΒΓΔΕ ορθογώνιο παραλληλόγραμμο** (σχ.2)



σχήμα 2

- αν $AB \neq A\Gamma$, τότε $\Gamma\Delta \neq EB$ και το ΒΓΔΕ είναι τραπέζιο και επειδή $\hat{\Delta} = \hat{E} = 90^0$, θα είναι **ΒΓΔΕ ορθογώνιο τραπέζιο** (σχ.1)

β) Πυθαγόρειο Θεώρημα στο $\overset{\Delta}{ABE}$:

$$AE^2 + BE^2 = AB^2 \Leftrightarrow x^2 + x^2 = y^2 \Leftrightarrow 2x^2 = y^2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2}y^2 \quad (1)$$

Πυθαγόρειο Θεώρημα στο $\overset{\Delta}{A\Gamma\Delta}$:

$$A\Delta^2 + \Delta\Gamma^2 = A\Gamma^2 \Leftrightarrow y^2 + y^2 = \beta^2 \Leftrightarrow 2y^2 = \beta^2 \Leftrightarrow y^2 = \frac{1}{2}\beta^2 \quad (2)$$

$$\begin{aligned} E_{B\Gamma\Delta E} &= E_{ABE} + E_{AB\Gamma} + E_{A\Gamma\Delta} \\ &= \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}\beta\gamma \\ &\overset{(1)}{\underset{(2)}{=}} \frac{1}{4}\beta^2 + \frac{1}{4}y^2 + \frac{1}{2}\beta\gamma \\ &= \frac{1}{4}(\beta^2 + \gamma^2 + 2\beta\gamma) \end{aligned}$$

άρα

$$\mathbf{E_{B\Gamma\Delta E} = \frac{1}{4}(\beta + \gamma)^2 \quad ή \quad E_{B\Gamma\Delta E} = \left(\frac{\beta + \gamma}{2}\right)^2}$$

Τριγωνομετρία

Ζήτημα 1ον

$ημ(180^0 - α) = ημα$
$συν(180^0 - α) = -συνα$
$εφ(180^0 - α) = -εφα$
$σφ(180^0 - α) = -σφα$

Ζήτημα 2ον

- $ημ150^0 = ημ(180^0 - 30^0) = ημ30^0 = \frac{1}{2}$

  $συν150^0 = συν(180^0 - 30^0) = -συν30^0 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

  $εφ150^0 = εφ(180^0 - 30^0) = -εφ30^0 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

  $σφ150^0 = σφ(180^0 - 30^0) = -σφ30^0 = -\sqrt{3}$

- $ημ135^0 = ημ(180^0 - 45^0) = ημ45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$

  $συν135^0 = συν(180^0 - 45^0) = -συν45^0 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

  $εφ135^0 = εφ(180^0 - 45^0) = -εφ45^0 = -1$

  $σφ135^0 = σφ(180^0 - 45^0) = -σφ45^0 = -1$