ΓΕΝΙΚΕΣ ΕΙΣΙΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 1967

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΑΛΓΕΒΡΑ

ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΟΣ ΚΥΚΛΟΣ – ΦΥΣΙΚΟΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ ΚΥΚΛΟΣ – ΓΕΩΠΟΝΟΔΑΣΟΛΟΓΙΚΟΣ ΚΥΚΛΟΣ

Σάββατο 9 Σεπτεμβρίου 1967

Ζήτημα 1ο

Έστω το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$, με $\alpha \neq 0$ και διακρίνουσα $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma < 0$.

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha \cdot \left(x^2 + \frac{\beta}{\alpha} x + \frac{\gamma}{\alpha} \right) = \alpha \cdot \left(x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{\beta}{2\alpha} + \frac{\gamma}{\alpha} \right)$$

$$= \alpha \cdot \left[x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{\beta}{2\alpha} + \left(\frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 - \left(\frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 + \frac{\gamma}{\alpha} \right]$$

$$= \alpha \cdot \left[\left(x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 - \frac{\beta^2}{4\alpha^2} + \frac{\gamma}{\alpha} \right] = \alpha \cdot \left[\left(x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 + \frac{-\beta^2 + 4\alpha\gamma}{4\alpha^2} \right]$$

$$= \alpha \cdot \left[\left(x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 + \frac{-\Delta}{4\alpha^2} \right]$$

Για κάθε τιμή του πραγματικού x είναι $\left(x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 \geq 0$ και $\frac{-\Delta}{4\alpha^2} > 0$,

δηλαδή $\left(x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 + \frac{-\Delta}{4\alpha^2} > 0$.

Επομένως το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ είναι πάντοτε ομόσημο του α.

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha \cdot \left[\left(x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 + \frac{-\Delta}{4\alpha^2} \right]$$

$$= \alpha \cdot \left[\left(x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 - i^2 \cdot \frac{-\Delta}{4\alpha^2} \right]$$

$$= \alpha \cdot \left[\left(x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 - \left(i \cdot \frac{\sqrt{-\Delta}}{2\alpha} \right)^2 \right]$$

$$= \alpha \cdot \left(x + \frac{\beta}{2\alpha} - i \cdot \frac{\sqrt{-\Delta}}{2\alpha} \right) \left(x + \frac{\beta}{2\alpha} + i \cdot \frac{\sqrt{-\Delta}}{2\alpha} \right)$$

Ζήτημα 2ο

Για να ισχύει $(\lambda - 4)x^2 + 6\lambda x + 5\lambda < 0$ για κάθε πραγματικό αριθμό x πρέπει και αρκεί $\lambda - 4 < 0$ και $\Delta < 0$.

- $\lambda - 4 < 0 \iff \lambda < 4$ (1)

- $\Delta = (6\lambda)^2 - 4\cdot(\lambda - 4)\cdot 5\lambda = 36\lambda^2 - 20\lambda^2 + 80\lambda = 16\lambda^2 + 80\lambda = 16\lambda\cdot(\lambda + 5)$
  $\Delta < 0 \iff 16\lambda\cdot(\lambda + 5) < 0 \iff -5 < \lambda < 0$ (2)

Συναληθεύοντας (1) και (2) έχουμε **$-5 < \lambda < 0$**

Ζήτημα 3ο

Αν οι ζητούμενοι αριθμοί είναι οι $x - \omega$, x, $x + \omega$, τότε ισχύουν :

- $x - \omega + x + x + \omega = 3 \iff 3x = 3 \iff x = 1$

- $(x - \omega)^4 + x^4 + (x + \omega)^4 = 83 \overset{x=1}{\Rightarrow}$
  $(1 - \omega)^4 + 1 + (1 + \omega)^4 = 83 \iff$
  $(1 - \omega)^4 + (1 + \omega)^4 = 82 \iff$
  $1 \cancel{- 4\omega} + 6\omega^2 \cancel{- 4\omega^3} + \omega^4 + 1 \cancel{+ 4\omega} + 6\omega^2 \cancel{+ 4\omega^3} + \omega^4 = 82 \iff$
  $2\omega^4 + 12\omega^2 + 2 = 82 \iff$
  $2\omega^4 + 12\omega^2 - 80 = 0 \overset{:2}{\iff}$
  $\omega^4 + 6\omega^2 - 40 = 0 \iff$
  $(\omega^2 - 4)\cdot(\omega^2 + 10) = 0 \iff$
  $\omega^2 - 4 = 0$ ή $\omega^2 + 10 = 0 \iff$
  $\omega^2 = 4$ ή $\omega^2 = -10 \iff$
  $\omega = 2$ ή $\omega = -2$ ή $\omega = i\sqrt{10}$ ή $\omega = -i\sqrt{10}$

  Από αυτές δεκτές είναι οι 2 και -2 (οι ζητούμενοι αριθμοί είναι ακέραιοι).

  ▹ Για $\omega = 2$ οι ζητούμενοι αριθμοί είναι : **-1 , 1 , 3**
  ▹ Για $\omega = -2$ οι ζητούμενοι αριθμοί είναι : **3 , 1 , -1**