ΓΕΝΙΚΕΣ ΕΙΣΙΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 1967

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΑΛΓΕΒΡΑ

(ΤΕΧΝΙΚΟΣ ΚΥΚΛΟΣ)

Δευτέρα 4 Σεπτεμβρίου 1967

Ζήτημα 1ο

Αν ρ_1, ρ_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0, \alpha \neq 0$ τότε :

$\rho_1 + \rho_2 = -\dfrac{\beta}{\alpha}$ (1) και $\rho_1 \cdot \rho_2 = \dfrac{\gamma}{\alpha}$ (2)

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0 \overset{\alpha\neq 0}{\Leftrightarrow} x^2 + \frac{\beta}{\alpha}x + \frac{\gamma}{\alpha} = 0 \underset{(2)}{\overset{(1)}{\Leftrightarrow}} x^2 - (\rho_1 + \rho_2)x + \rho_1 \cdot \rho_2 = 0$$

Ζήτημα 2ο

$$\begin{cases} (\alpha+\beta)x - (\alpha-\beta)y = 4\alpha\beta \\ \alpha x - \beta y = \alpha^2 + \beta^2 \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} \alpha+\beta & -(\alpha-\beta) \\ \alpha & -\beta \end{vmatrix} = -\beta\cdot(\alpha+\beta) + \alpha\cdot(\alpha-\beta)$$

$$= -\alpha\beta - \beta^2 + \alpha^2 - \alpha\beta$$

$$= \alpha^2 - 2\alpha\beta - \beta^2$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 4\alpha\beta & -(\alpha-\beta) \\ \alpha^2+\beta^2 & -\beta \end{vmatrix} = -4\alpha\beta^2 + (\alpha-\beta)\cdot(\alpha^2+\beta^2)$$

$$= -4\alpha\beta^2 + \alpha^3 + \alpha\beta^2 - \alpha^2\beta - \beta^3$$

$$= \alpha^3 - \alpha^2\beta - 3\alpha\beta^2 - \beta^3$$

$$= (\alpha+\beta)\cdot(\alpha^2 - 2\alpha\beta - \beta^2)$$

$$D_y = \begin{vmatrix} \alpha+\beta & 4\alpha\beta \\ \alpha & \alpha^2+\beta^2 \end{vmatrix} = (\alpha+\beta)\cdot(\alpha^2+\beta^2) - 4\alpha^2\beta$$

$$= +\alpha^3 + \alpha\beta^2 + \alpha^2\beta + \beta^3 - 4\alpha^2\beta$$

$$= \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 + \beta^3$$

$$= (\alpha-\beta)\cdot(\alpha^2 - 2\alpha\beta - \beta^2)$$

• Αν $\alpha^2 - 2\alpha\beta - \beta^2 \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq (1 \pm \sqrt{2})\cdot\beta$, τότε $D \neq 0$ και το σύστημα έχει μοναδική λύση

$$\left.\begin{array}{l} x = \dfrac{D_x}{D} = \dfrac{(\alpha+\beta)\cdot\cancel{(\alpha^2 - 2\alpha\beta - \beta^2)}}{\cancel{\alpha^2 - 2\alpha\beta - \beta^2}} = \alpha + \beta \\[2ex] y = \dfrac{D_y}{D} = \dfrac{(\alpha-\beta)\cdot\cancel{(\alpha^2 - 2\alpha\beta - \beta^2)}}{\cancel{\alpha^2 - 2\alpha\beta - \beta^2}} = \alpha - \beta \end{array}\right\} \Rightarrow (x\,,\,y) = (\alpha+\beta\,,\,\alpha-\beta)$$

Η ζητούμενη εξίσωση είναι :

$\omega^2 - [(\alpha+\beta) + (\alpha-\beta)]\omega + (\alpha+\beta)\cdot(\alpha-\beta) = 0 \Leftrightarrow$

$\omega^2 - 2\alpha\omega + \alpha^2 - \beta^2 = 0$

• Αν $\alpha^2 - 2\alpha\beta - \beta^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = (1 \pm \sqrt{2})\cdot\beta$, τότε $D = D_x = D_y = 0$ και το σύστημα έχει άπειρες λύσεις.

▹ Αν $\alpha\cdot\beta = 0$, τότε $\alpha = \beta = 0$ και το σύστημα γίνεται $\begin{cases} 0x + 0y = 0 \\ 0x + 0y = 0 \end{cases}$

το οποίο έχει λύση κάθε ζεύγος $(x\,,\,y) \in IR^2$

Η ζητούμενη εξίσωση είναι :

$\omega^2 - (\kappa + \lambda)\omega + \kappa\lambda = 0$,

όπου κ, λ οποιοιδήποτε πραγματικοί αρθμοί.

▹ Αν $\alpha\cdot\beta \neq 0$, τότε το σύστημα γίνεται $\begin{cases} x = \dfrac{\alpha^2 + \beta^2 + \beta y}{\alpha} \\ y \in IR \end{cases}$

το οποίο έχει λύση κάθε ζεύγος $\left(\dfrac{\alpha^2 + \beta^2 + \beta\mu}{\alpha}\,,\,\mu\right)$ με $\mu \in IR$

Η ζητούμενη εξίσωση είναι :

$$\omega^2 - \left(\frac{\alpha^2 + \beta^2 + \beta\mu}{\alpha} + \mu\right)\cdot\omega + \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \beta\mu}{\alpha}\cdot\mu = 0 \Leftrightarrow$$

$\alpha\omega^2 - (\alpha^2 + \beta^2 + \beta\mu + \alpha\mu)\cdot\omega + \alpha^2\mu + \beta^2\mu + \beta\mu^2 = 0$,

όπου μ οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός.

Ζήτημα 3ο

α = ο $1^{ος}$ όρος της αριθμητικής προόδου

ν = το πλήθος των όρων της αριθμητικής προόδου

ω = ο λόγος της προόδου

τ = ο τελευταίος όρος της προόδου

Σ = το άθροισμα των ν πρώτων όρων της αριθμητικής προόδου

$$\begin{cases} \tau = \alpha + (\nu - 1)\omega \quad (1) \\ \Sigma = \dfrac{\alpha + \tau}{2} \cdot \nu \quad (2) \quad \text{ή} \quad \Sigma = \dfrac{2\alpha + (\nu - 1)\omega}{2} \cdot \nu \quad (3) \end{cases}$$

Έχουμε 5 στοιχεία (α, ν, ω , τ , Σ) και δύο εξισώσεις.

Πρέπει να γνωρίζουμε 3 από τα 5 ώστε να βρούμε τα υπόλοιπα 2.

Περιπτώσεις :

- Γνωρίζω α, ν, ω :
  Από την (1) βρίσκω το τ και έπειτα από τη (2) βρίσκω το Σ.
- Γνωρίζω α, ν, τ :
  Από την (1) βρίσκω το ω και από τη (2) βρίσκω το Σ.
- Γνωρίζω α, ν, Σ :
  Από την (2) βρίσκω το τ και έπειτα από τη (1) βρίσκω το ω.
- Γνωρίζω α, ω, τ :
  Από την (1) βρίσκω το ν και έπειτα από τη (2) βρίσκω το Σ.
- Γνωρίζω α, ω, Σ :
  Από την (3) βρίσκω το ν και έπειτα από τη (1) βρίσκω το τ.
- Γνωρίζω α, τ, Σ :
  Από την (2) βρίσκω το ν και έπειτα από τη (1) βρίσκω το ω.
- Γνωρίζω ν, ω, τ :
  Από την (1) βρίσκω το α και έπειτα από τη (2) βρίσκω το Σ.
- Γνωρίζω ν, ω, Σ :
  Από την (3) βρίσκω το α και έπειτα από τη (1) βρίσκω το τ.
- Γνωρίζω ν, τ, Σ :
  Από την (2) βρίσκω το α και έπειτα από τη (1) βρίσκω το ω.
- Γνωρίζω ω, τ, Σ :
  Λύνω την (1) ως προς α αντικαθιστώ στην (2) και βρίσκω το ν
  και έπειτα βρίσκω το α.

Ζήτημα 4ο

1η λύση

$$\Sigma = \frac{2\alpha + (\nu - 1)\omega}{2}\cdot\nu \underset{\Sigma = 20}{\overset{\substack{\alpha = 6\\ \nu = 15}}{\Rightarrow}} 20 = \frac{2\cdot 6 + 14\omega}{2}\cdot 15 \Leftrightarrow 40 = (12 + 14\omega)\cdot 15 \Leftrightarrow$$

$$40 = 180 + 210\omega \Leftrightarrow 210\omega = -140 \Leftrightarrow \boldsymbol{\omega = -\frac{2}{3}}$$

2η λύση

$$\Sigma = \frac{\alpha + \tau}{2}\cdot\nu \underset{\Sigma = 20}{\overset{\substack{\alpha = 6\\ \nu = 15}}{\Rightarrow}} 20 = \frac{6 + \tau}{2}\cdot 15 \Leftrightarrow 40 = 15(6 + \tau) \Leftrightarrow$$

$$40 = 90 + 15\tau \Leftrightarrow 15\tau = -50 \Leftrightarrow \tau = -\frac{10}{3}$$

$$\tau = \alpha + (\nu - 1)\omega \underset{\tau = -\frac{10}{3}}{\overset{\substack{\alpha = 6\\ \nu = 15}}{\Rightarrow}} -\frac{10}{3} = 6 + 14\omega \Leftrightarrow -10 = 18 + 42\omega \Leftrightarrow$$

$$42\omega = -28 \Leftrightarrow \boldsymbol{\omega = -\frac{2}{3}}$$