ΓΕΝΙΚΕΣ ΕΙΣΙΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 1968

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΑΛΓΕΒΡΑ

ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΟΣ ΚΥΚΛΟΣ

Παρασκευή 13 Σεπτεμβρίου 1968

Ζήτημα 1^o

Ἂν εἶναι $\alpha > 0$, ἢ $\alpha = 0$ ἔχομεν $|\alpha| = \alpha$, ἐνῷ ἂν $\alpha < 0$, $|\alpha| = -\alpha$.

Ἂν α, β εἶναι ὁμόσημοι, ἔχομεν $|\alpha+\beta| = |\alpha| + |\beta|$. Διότι, διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ $\alpha+\beta$, προσθέτομεν τὰς ἀπολύτους τιμὰς τῶν α, β κ.τ.λ., ἤτοι :

Ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τοῦ α+β ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν α καὶ β, ἂν εἶναι ὁμόσημοι.

Ἂν α, β εἶναι ἑτερόσημοι, ἔχομεν $|\alpha+\beta| < |\alpha| + |\beta|$. Διότι, διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ $\alpha+\beta$, θὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὴν μεγαλυτέραν ἐκ τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν α, β τὴν μικροτέραν αὐτῶν κ.τ.λ. ὥστε :

Ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τοῦ ἀθροίσματος εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν προσθετέων, ἂν εἶναι ἑτερόσημοι.

Ἤτοι γενικῶς ἔχομεν :

Ἂν οἱ α, β εἶναι πραγματικοί, ἔχομεν $|\alpha+\beta| \leq |\alpha| + |\beta|$, τὴν μὲν ἰσότητα δι' ὁμοσήμους (ἢ 0), τὴν δὲ ἀνισότητα δι' ἑτεροσήμους προσθετέους.

Τὴν αὐτὴν ἰδιότητα δεικνύομεν καὶ ὡς ἑξῆς :

Ἔχομεν $-|\alpha| \leq \alpha \leq |\alpha|$.

Ἐπίσης ἔχομεν $-|\beta| \leq \beta \leq |\beta|$. Μὲ τὴν πρόσθεσιν τούτων κατὰ μέλη εὑρίσκομεν $-|\alpha|-|\beta| \leq \alpha+\beta \leq |\alpha|+|\beta|$

ἢ $-(|\alpha|+|\beta|) \leq \alpha+\beta \leq |\alpha|+|\beta|$, ἑπομένως εἶναι καὶ

$|\alpha+\beta| \leq \big||\alpha|+|\beta|\big| = |\alpha|+|\beta|$, δηλαδὴ $|\alpha+\beta| \leq |\alpha|+|\beta|$.

β') **Θὰ δείξωμεν ὅτι :** $|\alpha\pm\beta| \geq \big||\alpha|-|\beta|\big|$. Ἔχομεν :

$|\alpha| = |\alpha+\beta+(-\beta)| = |(\alpha+\beta)+(-\beta)| \leq |\alpha+\beta| + |-\beta| = |\alpha+\beta| + |\beta|$,

ἤτοι $|\alpha| \leq |\alpha+\beta| + |\beta|$, ἑπομένως $|\alpha| - |\beta| \leq |\alpha+\beta|$.

Ὁμοίως ἔχομεν $|\beta| = |\beta+\alpha+(-\alpha)| \leq |\alpha+\beta| + |-\alpha| = |\alpha+\beta| + |\alpha|$

καὶ $|\beta| - |\alpha| \leq |\alpha+\beta|$, ἄρα $-(|\alpha|-|\beta|) \leq |\alpha+\beta|$.

Ἐν γένει λοιπὸν ἔχομεν $|\alpha+\beta| \geq \big||\alpha|-|\beta|\big|$. Ἐπίσης ἔχομεν $|\alpha-\beta| = |\alpha+(-\beta)| \geq \big||\alpha|-|-\beta|\big| = \big||\alpha|-|\beta|\big|$ (ἕνεκα τῆς προηγουμένης σχέσεως), ἤτοι $|\alpha-\beta| \geq \big||\alpha|-|\beta|\big|$. Ὥστε γενικῶς ἔχομεν

$$|\alpha\pm\beta| \geq \big||\alpha|-|\beta|\big|.$$

$$\max\{\alpha , \beta\} = \frac{\alpha + \beta + |\alpha - \beta|}{2} \quad \text{και} \quad \min\{\alpha , \beta\} = \frac{\alpha + \beta - |\alpha - \beta|}{2}$$

Ζήτημα 2^o

Περιορισμοί : Πρέπει $x \neq 0$, $ψ \neq 0$ και $ω \neq 0$

$$\left(x + \frac{1}{ω}\right)\cdot\frac{1}{ψ} = 9 \Rightarrow x + \frac{1}{ω} = 9ψ \quad (1)$$

$$\left(x - 3ψ + \frac{1}{ω}\right)\cdot(x + ω) = 6 \overset{(1)}{\Rightarrow} \cancel{6}ψ\cdot(x + ω) = \cancel{6} \Rightarrow xψ + ψω = 1 \quad (2)$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{ψ} + \frac{1}{ω} = \frac{9}{2} \overset{\cdot xψω}{\Rightarrow} ψω + xω + xψ = \frac{9}{2}xψω \overset{(2)}{\Rightarrow} xω + 1 = \frac{9}{2}xψω \overset{:ω}{\Rightarrow}$$

$$x + \frac{1}{ω} = \frac{9}{2}xψ \overset{(1)}{\Rightarrow} 9ψ = \frac{9}{2}xψ \overset{ψ\neq 0}{\Rightarrow} x = 2$$

$$(1) \overset{x=2}{\Rightarrow} 2 + \frac{1}{ω} = 9ψ \overset{\cdot ω}{\Rightarrow} 2ω + 1 = 9ψω \quad (3)$$

$$(2) \overset{x=2}{\Rightarrow} 2ψ + ψω = 1 \overset{\cdot ω}{\Rightarrow} ψω = 1 - 2ψ \quad (4)$$

$$(3) \overset{(4)}{\Rightarrow} 2ω + 1 = 9\cdot(1 - 2ψ) \overset{\cdot ω}{\Rightarrow} 2ω + 1 = 9 - 18ψ \Rightarrow ω = 4 - 9ψ \quad (5)$$

$$(3) \overset{(4)}{\Rightarrow} ψ\cdot(4 - 9ψ) = 1 - 2ψ \Rightarrow 4ψ - 9ψ^2 = 1 - 2ψ \Rightarrow 0 = 9ψ^2 - 6ψ + 1 \Rightarrow$$

$$(3ψ - 1)^2 = 0 \Rightarrow 3ψ - 1 = 0 \Rightarrow 3ψ = 1 \Rightarrow ψ = \frac{1}{3}$$

$$(5) \overset{ψ=\frac{1}{3}}{\Rightarrow} ω = 4 - 9\cdot\frac{1}{3} \Rightarrow ω = 1$$

Επομένως $x = 2$, $ψ = \frac{1}{3}$ και $ω = 1$.

Ζήτημα 3ο

- Αν $\Delta = 0$, τότε $\rho_1 = \rho_2$ και $|\rho_1| = |\rho_2|$ (άτοπο)
- Άρα $\Delta > 0$ και $|\rho_1| \neq |\rho_2|$. Είναι $\rho_1 + \rho_2 = 2\alpha$ και $\rho_1 \cdot \rho_2 = \beta$

$$M = \max\left\{\left|\frac{\rho_1}{\rho_2}\right|, \left|\frac{\rho_2}{\rho_1}\right|\right\} \quad \text{και} \quad E = \min\left\{\left|\frac{\rho_1}{\rho_2}\right|, \left|\frac{\rho_2}{\rho_1}\right|\right\}$$

$$\lambda = 2\cdot\left|\frac{2\alpha^2 - \beta}{\beta}\right| = \left|2\cdot\frac{2\alpha^2 - \beta}{\beta}\right| = \left|\frac{4\alpha^2 - 2\beta}{\beta}\right| = \left|\frac{(2\alpha)^2 - 2\cdot\beta}{\beta}\right|$$

$$= \left|\frac{(\rho_1 + \rho_2)^2 - 2\cdot\rho_1\cdot\rho_2}{\rho_1\cdot\rho_2}\right| = \left|\frac{\rho_1^{\,2} + \cancel{2\rho_1\rho_2} + \rho_2^{\,2} - \cancel{2\rho_1\rho_2}}{\rho_1\cdot\rho_2}\right| = \left|\frac{\rho_1^{\,2} + \rho_2^{\,2}}{\rho_1\cdot\rho_2}\right|$$

$$= \left|\frac{\rho_1^{\,2}}{\rho_1\cdot\rho_2} + \frac{\rho_2^{\,2}}{\rho_1\cdot\rho_2}\right| = \left|\frac{\rho_1}{\rho_2} + \frac{\rho_2}{\rho_1}\right| \underset{\text{ομόσημοι}}{\overset{\frac{\rho_1}{\rho_2},\,\frac{\rho_2}{\rho_1}}{=}} \left|\frac{\rho_1}{\rho_2}\right| + \left|\frac{\rho_2}{\rho_1}\right|$$

Επομένως $\lambda = \left|\frac{\rho_1}{\rho_2}\right| + \left|\frac{\rho_2}{\rho_1}\right| = M + E \quad (1)$

Οι αριθμοί M και E είναι αντίστροφοι, άρα $E = \frac{1}{M}$

Επειδή $|\rho_1| \neq |\rho_2|$, θα είναι $0 < E < 1$ και $1 < M < \lambda$.

Θα αποδείξουμε ότι : $\boldsymbol{\lambda - 1 < M < \lambda} \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \lambda - 1 < \lambda - E < \lambda \Leftrightarrow$
$-1 < -E < 0 \Leftrightarrow 0 < E < 1$ (που ισχύει)

Θα αποδείξουμε ότι : $\boldsymbol{\frac{1}{\lambda} < E < \frac{1}{\lambda - 1}} \overset{E = \frac{1}{M}}{\Leftrightarrow} \frac{1}{\lambda} < \frac{1}{M} < \frac{1}{\lambda - 1} \underset{\text{θετικά}}{\overset{\text{μέλη}}{\Leftrightarrow}}$
$\lambda > M > \lambda - 1$ (που ισχύει)

Επίσης $|\rho_1| \neq |\rho_2|$, άρα $(|\rho_1| - |\rho_2|)^2 > 0 \Leftrightarrow |\rho_1|^2 + |\rho_2|^2 - 2\cdot|\rho_1|\cdot|\rho_2| > 0 \Leftrightarrow$

$$|\rho_1|^2 + |\rho_2|^2 > 2\cdot|\rho_1|\cdot|\rho_2| \Leftrightarrow \frac{|\rho_1|^2}{|\rho_1|\cdot|\rho_2|} + \frac{|\rho_2|^2}{|\rho_1|\cdot|\rho_2|} > 2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{|\rho_1|}{|\rho_1|} + \frac{|\rho_2|}{|\rho_1|} > 2 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \boldsymbol{\lambda > 2}$$