ΓΕΝΙΚΕΣ ΕΙΣΙΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 1968
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΑΛΓΕΒΡΑ
ΦΥΣΙΚΟΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ ΚΥΚΛΟΣ
Τετάρτη 11 Σεπτεμβρίου 1968

Ζήτημα 1ο

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΙΣ ΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΔΥΟ ΠΡΩΤΟΒΑΘΜΙΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΜΕ ΔΥΟ ΑΓΝΩΣΤΟΥΣ.

α) Ἔστω τὸ σύστημα :

$$(\mathrm{A}): \left.\begin{array}{l}(1): \alpha x+\beta\psi=\gamma \\ (2): \alpha' x+\beta'\psi=\gamma'\end{array}\right\}$$

Τὴν ἀνωτέρω μορφὴν δύναται νὰ λάβῃ κάθε σύστημα πρώτου βαθμοῦ μὲ δύο ἀγνώστους. Τὰ α, β, γ, α′, β′, γ′ συμβολίζουν δεδομένους πραγματικοὺς ἀριθμούς, τὰ δὲ x, ψ τοὺς ἀγνώστους.

Ι. Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ὅλοι οἱ ἀριθμοὶ $\alpha,\beta,\gamma,\alpha',\beta',\gamma'$ εἶναι διάφοροι τοῦ μηδενός. Ἀπὸ τὴν (1) εὑρίσκομεν :

$x=\dfrac{\gamma-\beta\psi}{\alpha}$ καὶ ἀντικαθιστῶντες τὸ x μὲ τὸ ἴσον του εἰς τὴν (2) τοῦ (Α) ἔχομεν τὴν $(\alpha\beta'-\alpha'\beta)\psi=\alpha\gamma'-\alpha'\gamma$.

Ὥστε εἶναι :

$$(\mathrm{A})\left\{\begin{array}{l}\alpha x+\beta\psi=\gamma \\ \alpha' x+\beta'\psi=\gamma'\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c}x=\dfrac{\gamma-\beta\psi}{\alpha} \\ (\alpha\beta'-\alpha'\beta)\psi=\alpha\gamma'-\alpha'\gamma\end{array}\right\}\begin{array}{l}(3)\\ \\(4)\end{array} \quad (\mathrm{B})$$

Εἰς τὸ (Β) ἡ ἐξίσωσις (4) εἶναι μὲ ἕνα μόνον ἄγνωστον. Ἐὰν λοιπὸν ἡ (4) εἶναι δυνατή, ἀδύνατος ἢ ἀόριστος, θὰ εἶναι καὶ τὸ σύστημα (Β), ἄρα καὶ τὸ ἰσοδύναμόν του (Α), δυνατόν, ἀδύνατον ἢ ἀόριστον ἀντιστοίχως.

1ον. Δυνατὴ εἶναι ἡ (4) ὅταν καὶ μόνον ὅταν εἶναι $\alpha\beta'-\alpha'\beta\neq 0$. **Ἐπομένως τὸ σύστημα (Α) εἶναι δυνατὸν ὅταν καὶ μόνον ὅταν εἶναι $\alpha\beta'-\alpha'\beta\neq 0$.** Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἀπὸ τὴν (4) ἔχομεν : $\psi=\dfrac{\alpha\gamma'-\alpha'\gamma}{\alpha\beta'-\alpha'\beta}$. Ἐὰν θέσωμεν τὴν τιμὴν αὐτὴν τοῦ ψ εἰς τὴν (3), εὑρίσκομεν $x=\dfrac{\gamma\beta'-\gamma'\beta}{\alpha\beta'-\alpha'\beta}$. Παρατηροῦμεν ὅτι εἶναι $\alpha\beta'-\alpha'\beta\neq 0\Leftrightarrow\dfrac{\alpha}{\alpha'}\neq\dfrac{\beta}{\beta'}$ (i)

2ον. Ἐὰν εἶναι $\alpha\beta'-\alpha'\beta=0$ καὶ $\alpha\gamma'-\alpha'\gamma\neq 0$ ἡ ἐξίσωσις (4) εἶναι ἀδύνατος. Δὲν ὑπάρχει τιμὴ τοῦ ψ λύσις τῆς (4). Ὥστε καὶ ἀπὸ τὴν (3) δὲν θὰ ὑπάρχῃ λύσις της ὡς πρὸς x καὶ τὸ σύστημα (Α) **εἶναι ἀδύνατον.**

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἔχομεν : $\alpha\beta'-\alpha'\beta=0\Leftrightarrow\alpha\beta'=\alpha'\beta\Leftrightarrow\dfrac{\alpha}{\alpha'}=$ $=\dfrac{\beta}{\beta'}$ καὶ $\alpha\gamma'-\alpha'\gamma\neq 0\Leftrightarrow\alpha\gamma'\neq\alpha'\gamma\Leftrightarrow\dfrac{\alpha}{\alpha'}\neq\dfrac{\gamma}{\gamma'}$, ἐπομένως εἶναι καί : $\dfrac{\alpha}{\alpha'}=\dfrac{\beta}{\beta'}\neq\dfrac{\gamma}{\gamma'}$. (ii)

Ἐὰν θέσωμεν $\dfrac{\alpha}{\alpha'}=\rho$ θὰ ἔχωμεν $\alpha=\alpha'\rho$, $\beta=\beta'\rho$ καὶ $\gamma\neq\gamma'\rho$, ὡς ἐξάγεται ἀπὸ τὰς (ii). Ἡ ἐξίσωσις (1) τοῦ (Α) γίνεται : $\rho(\alpha' x+\beta'\psi)=\gamma$ καὶ τὸ σύστημα (Α) γράφεται : $\left.\begin{array}{l}\rho(\alpha' x+\beta'\psi)=\gamma \\ \alpha' x+\beta'\psi=\gamma'\end{array}\right\}$. Αἱ ἐξισώσεις αὐταὶ εἶναι ἀδύνατον νὰ ἀληθεύουν συγχρόνως, διότι εἶναι $\rho\gamma'\neq\gamma$. Δυνάμεθα νὰ λέγωμεν εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ὅτι αἱ ἐξισώσεις **εἶναι ἀσυμβίβαστοι.**

3ον. Ἐὰν εἶναι $\alpha\beta' - \alpha'\beta = 0$ καὶ $\alpha\gamma' - \alpha'\gamma = 0$ ἡ ἐξίσωσις (4) γίνεται ἀόριστος. Τὸ ψ δύναται νὰ λάβῃ κάθε τιμὴν εἰς τὸ R. Εἰς ἑκάστην τιμὴν τοῦ ψ ἀντιστοιχίζεται διὰ τῆς (3) τοῦ συστήματος (Β) μία μόνον τιμὴ τοῦ x. Τὸ σύστημα λοιπὸν (Β), ἄρα καὶ τὸ (Α) **ἔχει μίαν ἀπειρίαν λύσεων.** Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἔχομεν :

$$\alpha\beta' - \alpha'\beta = 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\beta}{\beta'} \quad \text{καὶ} \quad \alpha\gamma' - \alpha'\gamma = 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\gamma}{\gamma'},$$

δηλαδὴ $\dfrac{\alpha}{\alpha'} = \dfrac{\beta}{\beta'} = \dfrac{\gamma}{\gamma'}$, (iii)

Ἐὰν μεταξὺ τῶν συντελεστῶν τοῦ (Α) ἰσχύῃ ἡ (iii), τότε τὸ σύστημα τοῦτο εἶναι ἀόριστον. Διότι ἐὰν θέσωμεν $\dfrac{\alpha}{\alpha'} = \rho$, ἀπὸ τὰς (iii) ἔχομεν $\alpha = \alpha'\rho$, $\beta = \beta'\rho$ καὶ $\gamma = \gamma'\rho$ καὶ αἱ ἐξισώσεις τοῦ (Α) γίνονται :

$$\left.\begin{aligned} \rho\,(\alpha' x + \beta'\psi) &= \rho\gamma' \\ \alpha' x + \beta'\psi &= \gamma' \end{aligned}\right\}$$ αἱ ὁποῖαι συμπίπτουν εἰς μίαν μόνον ἐξίσωσιν,

ἐπειδὴ εἶναι $\rho \neq 0$. Ἀλλὰ μία ἐξίσωσις πρώτου βαθμοῦ ὡς πρὸς x, ψ ἔχει ἀπείρους λύσεις (x, ψ) εἰς τὸ σύνολον R x R.

II. Ἐὰν εἶναι οἱ $\alpha, \beta, \alpha', \beta' \neq 0$ καὶ $\gamma = \gamma' = 0$. Ἐπειδὴ αἱ (3) καὶ (4) ἰσχύουν, εὑρίσκομεν ἀπὸ τὴν (4) ὅτι εἶναι $\psi = 0$ καὶ ἀπὸ τὴν (3) $x = 0$, ἐὰν εἶναι $\alpha\beta' \neq \alpha'\beta$, δηλαδὴ τὸ σύστημα (Α) εἶναι δυνατὸν καὶ ἔχει μίαν λύσιν τὴν $x = 0$, $\psi = 0$.

Ἐὰν εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν εἶναι $\alpha\beta' - \alpha'\beta = 0$, δηλ. $\dfrac{\alpha}{\alpha'} = \dfrac{\beta}{\beta'}$, τὸ (Α) εἶναι ἀόριστον σύστημα.

III. Ἐὰν εἶναι $\alpha = \beta = 0$, τότε τὸ σύστημα (Α) γίνεται :

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \gamma \\ \alpha' x + \beta'\psi &= \gamma' \end{aligned}\right\}$$ Ἐὰν εἶναι $\gamma = 0$, τὸ (Α) περιορίζεται εἰς μίαν μόνον ἐξίσωσιν, τὴν $\alpha' x + \beta'\psi = \gamma'$, καὶ ἔχει ἀπείρους λύσεις. Ἐὰν ὅμως εἶναι $\gamma \neq 0$, τὸ σύστημα (Α) εἶναι ἀδύνατον.

Τὰ αὐτὰ συμπεράσματα ἔχομεν καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν κατὰ τὴν ὁποίαν εἶναι $\alpha' = \beta' = 0$.

IV. Ἐὰν εἶναι $\alpha = \alpha' = 0$, ἐξαφανίζεται ὁ ἕνας ἄγνωστος καὶ τὸ σύστημα γίνεται :

$$\left.\begin{aligned} \beta\psi &= \gamma \\ \beta'\psi &= \gamma' \end{aligned}\right\} \; (\Gamma)$$

Ἐὰν εἶναι $\dfrac{\gamma}{\beta} = \dfrac{\gamma'}{\beta'}$, τὸ (Γ) ἔχει τὴν λύσιν :

$x \in R$ (δηλαδὴ x = ὁποιοσδήποτε ἀριθμὸς πραγματικὸς)

$\psi = \dfrac{\gamma}{\beta} = \dfrac{\gamma'}{\beta'}$, ἑπομένως εἶναι ἀόριστον.

Ἐὰν εἶναι $\dfrac{\gamma}{\beta} \neq \dfrac{\gamma'}{\beta'}$, τὸ (Γ) εἶναι ἀδύνατον.

V. Ἐὰν εἶναι $\alpha = \alpha' = \beta = \beta' = 0$, τὸ σύστημα (Α) γίνεται :

$$\left.\begin{aligned} 0x + 0\psi &= \gamma \\ 0x + 0\psi &= \gamma' \end{aligned}\right\}$$ Ἐὰν εἶναι $\gamma = 0$ καὶ $\gamma' = 0$ ἔχομεν δύο ταυτότητας.

Τὰ x, ψ λαμβάνουν καὶ τὰ δύο αὐθαιρέτους τιμὰς καὶ λέγομεν τώρα ὅτι τὸ (Α) ἔχει **διπλῆν ἀοριστίαν** λύσεων.

Ἐὰν ἕνα ἀπὸ τὰ γ καὶ γ' δὲν εἶναι μηδέν, τὸ σύστημα **εἶναι ἀδύνατον.**

Ἡ περίπτωσις $\alpha = \alpha' = \beta = \beta' = 0$ δύναται νὰ παρουσιασθῇ κατὰ τὴν μελέτην **παραμετρικῶν** συστημάτων. Π.χ. εἰς τὸ σύστημα :

$$\left.\begin{aligned} (\lambda + 1)\,x + (\lambda^2 - 1)\,\psi &= 24 \\ (\lambda^3 + 1)\,x - (\lambda + 1)\,\psi &= 17 \end{aligned}\right\} \quad \text{διὰ } \lambda = -1.$$

Συμπέρασμα. Τὸ σύστημα $\left.\begin{aligned} \alpha x + \beta\psi &= \gamma \\ \alpha' x + \beta'\psi &= \gamma' \end{aligned}\right\}$ ἔχει μίαν λύσιν καὶ μόνον μίαν, τὴν $x = \dfrac{\gamma\beta' - \gamma'\beta}{\alpha\beta' - \alpha'\beta}$, $\psi = \dfrac{\alpha\gamma' - \alpha'\gamma}{\alpha\beta' - \alpha'\beta}$, ὅταν, καὶ μόνον ὅταν, εἶναι $\alpha\beta' - \alpha'\beta \neq 0$.

Ἐὰν εἶναι $\alpha\beta' - \alpha'\beta = 0$ καὶ $\alpha\gamma' - \alpha'\gamma \neq 0$ τὸ σύστημα εἶναι ἀδύνατον.

Ἐὰν εἶναι $\alpha\beta' - \alpha'\beta = 0$ καὶ $\alpha\gamma' - \alpha'\gamma = 0$ τὸ σύστημα εἶναι ἀόριστον.

Ζήτημα 2ο

- $x^3 + \cancel{y^3} + \mu\cdot(x+y) = \cancel{y^3} + z^3 + \mu\cdot(y+z) \Leftrightarrow x^3 + \mu x + \cancel{\mu y} = z^3 + \cancel{\mu y} + \mu z \Leftrightarrow$

  $x^3 - z^3 + \mu x - \mu z = 0 \Leftrightarrow (x-z)\cdot(x^2 + xz + z^2) + \mu\cdot(x-z) = 0 \Leftrightarrow$

  $(x-z)\cdot(x^2 + xz + z^2 + \mu) = 0 \overset{x\neq z}{\Leftrightarrow} x^2 + xz + z^2 + \mu = 0 \ \ (1)$

- Όμοια από $y^3 + \cancel{z^3} + \mu(y+z) = \cancel{z^3} + x^3 + \mu(z+x)$ ... προκύπτει ότι

  $y^2 + xy + x^2 + \mu = 0 \ \ (2)$

- Από (1) και (2) με αφαίρεση κατά μέλη έχουμε :

  $\cancel{x^2} + xz + z^2 + \cancel{\mu} - y^2 - xy \cancel{-x^2} \cancel{-\mu} = 0 \Leftrightarrow z^2 - y^2 + xz - xy = 0 \Leftrightarrow$

  $z^2 - y^2 + xz - xy = 0 \Leftrightarrow (z-y)\cdot(z+y) + x\cdot(z-y) = 0 \Leftrightarrow$

  $(z-y)\cdot(z+y+x) = 0 \overset{y\neq z}{\Leftrightarrow} x + y + z = 0 \ \ (3)$

$$A = \left(\frac{x}{y-z} + \frac{y}{z-x} + \frac{z}{x-y}\right)\cdot\left(\frac{y-z}{x} + \frac{z-x}{y} + \frac{x-y}{z}\right)$$

$$= \frac{x(z-x)(x-y) + y(y-z)(x-y) + z(y-z)(z-x)}{(y-z)(z-x)(x-y)} \cdot \frac{yz(y-z) + xz(z-x) + xy(x-y)}{xyz}$$

$$= \frac{x(xz-yz-x^2+xy) + y(xy-y^2-zx+zy) + z(yz-xy-z^2+xz)}{(y-z)(z-x)(x-y)} \cdot \frac{yz(y-z) + xz^2 - x^2z + x^2y - xy^2}{xyz}$$

$$= \frac{x^2z-xyz-x^3+x^2y+xy^2-y^3-xyz+zy^2+yz^2-xyz-z^3+xz^2}{(y-z)(z-x)(x-y)} \cdot \frac{yz(y-z) - x(y-z)(y+z) + x^2(y-z)}{xyz}$$

$$= \frac{x^2z + x^2y + xy^2 + zy^2 + yz^2 + xz^2 - x^3 - y^3 - z^3 - 3xyz}{(y-z)(z-x)(x-y)} \cdot \frac{(y-z)\cdot[yz - x\cdot(y+z) + x^2]}{xyz}$$

$$= \frac{x^2\cdot(z+y) + y^2\cdot(x+z) + z^2\cdot(y+x) - x^3 - y^3 - z^3 - 3xyz}{(y-z)(z-x)(x-y)} \cdot \frac{(y-z)\cdot(yz - xy - xz + x^2)}{xyz}$$

$$= \frac{x^2\cdot(-x) + y^2\cdot(-y) + z^2\cdot(-z) - x^3 - y^3 - z^3 - 3xyz}{(y-z)(z-x)(x-y)} \cdot \frac{(y-z)\cdot[y\cdot(z-x) - x\cdot(z-x)]}{xyz}$$

$$= \frac{-x^3 - y^3 - z^3 - x^3 - y^3 - z^3 - 3xyz}{\cancel{(y-z)}\,\cancel{(z-x)}(x-y)} \cdot \frac{\cancel{(y-z)}\cdot\cancel{(z-x)}\cdot(y-x)}{xyz}$$

$$= \frac{-2x^3 - 2y^3 - 2z^3 - 3xyz}{\cancel{x-y}} \cdot \frac{-\cancel{(x-y)}}{xyz}$$

$$= \frac{2\cdot(x^3 + y^3 + z^3) + 3xyz}{xyz}$$

$\boxed{\text{Είναι } x + y + z = 0 \ (3), \text{ άρα } x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz}$

$$= \frac{2\cdot 3xyz + 3xyz}{xyz}$$

$$= \frac{9xyz}{xyz}$$

Άρα $A = 9$ σταθερό, ανεξάρτητο των x, y, z και μ.

Ζήτημα 3ο

Η εξίσωση γράφεται $(x + yi)^2 - 3\cdot\sqrt{x^2 + y^2} + \alpha^2 = 0 \Leftrightarrow$

$x^2 + 2xyi - y^2 - 3\cdot\sqrt{x^2 + y^2} + \alpha^2 = 0 \Leftrightarrow$

$$\left(x^2 - y^2 - 3\cdot\sqrt{x^2 + y^2} + \alpha^2\right) + 2xyi = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 - 3\cdot\sqrt{x^2 + y^2} + \alpha^2 = 0 \quad (1) \\ \text{και} \quad 2xy = 0 \quad (2) \end{cases}$$

• (2) $\Rightarrow$ $x = 0$ ή $y = 0$

▹ Αν $x = 0$, τότε η (1) γίνεται : $-y^2 - 3\sqrt{y^2} + \alpha^2 = 0 \Leftrightarrow |y|^2 + 3|y| - \alpha^2 = 0$

η οποία έχει $\Delta = 9 + 4\alpha^2 > 0$ και

$$|y| = \frac{-3 + \sqrt{9 + 4\alpha^2}}{2} > 0 \text{ (δεκτή) ή } |y| = \frac{-3 - \sqrt{9 + 4\alpha^2}}{2} < 0 \text{ (απορρίπτεται)},$$

δηλαδή $y = \pm\dfrac{-3 + \sqrt{9 + 4\alpha^2}}{2}$ και $z = \pm\dfrac{-3 + \sqrt{9 + 4\alpha^2}}{2}\cdot i$ $\rightarrow$ (2 λύσεις)

▹ Αν $y = 0$, τότε η (1) γίνεται : $x^2 - 3\sqrt{x^2} + \alpha^2 = 0 \Leftrightarrow |x|^2 - 3|x| + \alpha^2 = 0$

η οποία έχει $\Delta = 9 - 4\alpha^2$

▲ Αν $0 < \alpha < \dfrac{3}{2}$, τότε $\Delta > 0$ και $|x| = \dfrac{3 \pm \sqrt{9 - 4\alpha^2}}{2} > 0$ (δεκτές),

δηλαδή $z = x = \pm\dfrac{3 \pm \sqrt{9 - 4\alpha^2}}{2}$ $\rightarrow$ (4 λύσεις)

▲ Αν $\alpha = \dfrac{3}{2}$, τότε $\Delta = 0$ και $|x| = \dfrac{3}{2}$, δηλαδή $z = x = \pm\dfrac{3}{2}$ $\rightarrow$ (2 λύσεις)

▲ Αν $\alpha > \dfrac{3}{2}$, τότε $\Delta > 0$ και είναι αδύνατη

Συνοψίζοντας :

• αν $0 < \alpha < \dfrac{3}{2}$ έχουμε έξι λύσεις :

$$z_1 = \frac{-3 + \sqrt{9 + 4\alpha^2}}{2}\cdot i, \quad z_2 = -\frac{-3 + \sqrt{9 + 4\alpha^2}}{2}\cdot i, \quad z_3 = \frac{3 + \sqrt{9 - 4\alpha^2}}{2},$$

$$z_4 = \frac{3 - \sqrt{9 - 4\alpha^2}}{2}, \quad z_5 = -\frac{3 + \sqrt{9 - 4\alpha^2}}{2}, \quad z_6 = -\frac{3 - \sqrt{9 - 4\alpha^2}}{2}$$

• αν $\alpha = \dfrac{3}{2}$ έχουμε τέσσερις λύσεις :

$$z_1 = \frac{-3 + 3\sqrt{2}}{2}\cdot i, \quad z_2 = \frac{3 - 3\sqrt{2}}{2}\cdot i, \quad z_3 = \frac{3}{2}, \quad z_4 = -\frac{3}{2}$$

• αν $\alpha > \dfrac{3}{2}$ έχουμε δύο λύσεις :

$$z_1 = \frac{-3 + \sqrt{9 + 4\alpha^2}}{2}\cdot i, \quad z_2 = -\frac{-3 + \sqrt{9 + 4\alpha^2}}{2}\cdot i$$