ΓΕΝΙΚΕΣ ΕΙΣΙΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 1968

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΑΛΓΕΒΡΑ

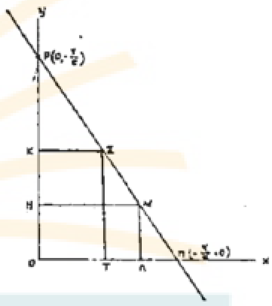
(ΤΕΧΝΙΚΟΣ ΚΥΚΛΟΣ)

Πέμπτη 12 Σεπτεμβρίου 1968

Ζήτημα 1ο
α) (Αριστείδης Πάλλας)

Ἡ ἐξίσωσις $\alpha x+\beta y+\gamma=0$ (1) παριστᾷ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τῶν ἀξόνων εὐθεῖαν γραμμήν.

Ἀπόδειξις. **Περίπτωσις I** Ἔστω $\alpha, \beta, \gamma \neq 0$.



Ἡ (1) διὰ $x=0$ δίδει $y=-\dfrac{\gamma}{\beta}$ καὶ διὰ $y=0$ δίδει $x=-\dfrac{\gamma}{\alpha}$. Οὕτως ἔχομεν τὰ σημεῖα:

$$\Pi\left(-\frac{\gamma}{\alpha},\ 0\right),\quad P\left(0,\ -\frac{\gamma}{\beta}\right).$$

Θὰ δείξωμεν ὅτι ἡ $\alpha x+\beta y+\gamma=0$, παριστᾷ τὴν εὐθεῖαν ΠΡ. Πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ δειχθῇ ὅτι πᾶν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου, τοῦ ὁποίου αἱ συντεταγμέναι ἐπαληθεύουν τὴν (1) κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας ΠΡ καὶ πᾶν σημεῖον κείμενον ἐπὶ τῆς ΠΡ ἔχει συντεταγμένας αἱ ὁποῖαι ἐπαληθεύουν τὴν (1). Ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς:

Ἔστω x_1 τυχοῦσα τιμὴ τῆς x καὶ $y_1=-\dfrac{\alpha x_1+\gamma}{\beta}$ ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ τῆς y ἡ εὑρισκομένη ἐκ τῆς (1) διὰ $x=x_1$. Οὕτως ἔχομεν τὸ σημεῖον:

$$\Sigma\left(x_1=OT,\quad y_1=OK=-\frac{\alpha x_1+\gamma}{\beta}\right).$$ Ἔχομεν:

$$OT=K\Sigma=x_1,\ T\Sigma=OK=-\frac{\alpha x_1+\gamma}{\beta},\ KP=OP-OK=-\frac{\gamma}{\beta}+\frac{\alpha x_1+\gamma}{\beta}=\frac{\alpha x_1}{\beta},$$

$$T\Pi=O\Pi-OT=-\frac{\gamma}{\alpha}-x_1=-\frac{\alpha x_1+\gamma}{\alpha}.$$

Ἐξ αὐτῶν προκύπτει $\dfrac{KP}{T\Sigma}=\dfrac{K\Sigma}{T\Pi}$. Ἄρα τὰ τρίγωνα ΤΠΣ καὶ ΚΣΡ εἶναι ὅμοια καὶ συνεπῶς ἡ ΠΣΡ εἶναι εὐθεῖα. Ἄρα τὸ Σ κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας ΠΡ. Ἔστω ἤδη $M(x', y')$ τυχὸν σημεῖον τῆς ΠΡ, Ἐπειδὴ εἶναι:

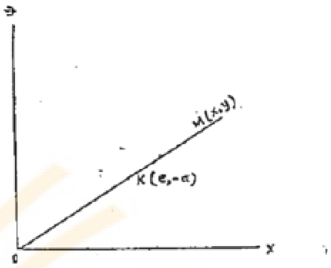
$$O\Lambda=x',\ ON=y',\ \Lambda\Pi=-\frac{\gamma}{\alpha}-x'=-\frac{\alpha x'+\gamma}{\alpha},\ NP=OP-ON=-\frac{\gamma}{\beta}-y'=$$

$$=-\frac{\beta y'+\gamma}{\beta},$$ ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΜΛΠ καὶ ΝΜΡ προκύπτει ἡ ἀναλογία:

$$\frac{\Lambda\Pi}{N\Pi}=\frac{\Lambda M}{NP},\quad \text{ἢ}\quad \frac{-\dfrac{\alpha x'+\gamma}{\alpha}}{x_1}=\frac{y'}{-\dfrac{\beta y'+\gamma}{\beta}},$$ ἢ μετὰ τὰς πράξεις, $\alpha x'+\beta y'+\gamma=0$.

Ἄρα τὸ σημεῖον $M(x'.\ y')$ ἐπαληθεύει τὴν (1).

Περίπτωσις ΙΙ. Ἐὰν $\alpha = 0$, $\beta, \gamma \neq 0$. Τότε ἡ (1) δίδει $y = -\frac{\gamma}{\beta}$. Ἐκ ταύτης παρατηροῦμεν ὅτι ὅλα τὰ σημεῖα, τὰ ὁποῖα ἐπαληθεύουν τὴν (1), ἔχουν $y = -\frac{\gamma}{\beta}$ καὶ συνεπῶς κεῖνται ἐπὶ τῆς εὐθείας τῆς ἀγομένης ἐκ τοῦ σημείου $P\left(0, -\frac{\gamma}{\beta}\right)$ παραλλήλου πρὸς τὸν ἄξονα 0x. Ὁμοίως ἐὰν $\beta = 0$, $\alpha, \gamma \neq 0$, ἡ (1) γίνεται $x = -\frac{\gamma}{\alpha}$ καὶ παριστᾶ εὐθεῖαν παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα 0y διερχομένην διὰ τοῦ σημείου $\Pi\left(-\frac{\gamma}{\alpha}, 0\right)$.



Ἐὰν $\gamma = 0$, $\alpha, \beta \neq 0$, ἡ (1) γίνεται $\alpha x + \beta y = 0$, ἢ $\frac{x}{\beta} = \frac{y}{-\alpha}$ (α). Θεωροῦμεν τὴν εὐθεῖαν ΟΚ, ἔνθα $K(\beta, -\alpha)$. Λόγῳ τῆς ἀναλογίας (α), τὰ σημεῖα $M(x, y)$, $K(\beta, -\alpha)$ καὶ Ο κεῖται ἐπ' εὐθείας, ἔνθα $M(x, y)$ τυχὸν σημεῖον τοῦ ὁποίου αἱ συντεταγμέναι ἐπαληθεύουν τήν: $\alpha x + \beta y = 0$.

Ἄρα ἡ $\alpha x + \beta y = 0$ παριστᾶ εὐθεῖαν διερχομένην διὰ τῆς ἀρχῆς Ο καὶ τοῦ σημείου Κ.

Ἐὰν $\alpha = \gamma = 0$, $\beta \neq 0$ ἡ (1) γίνεται $y = 0$ καὶ παριστᾶ τὸν ἄξονα τῶν τετμημένων. Ἐὰν $\beta = \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$ ἡ (1) γίνεται $x = 0$ καὶ παριστᾶ τὸν ἄξονα τῶν τεταγμένων.

Παρατήρησις. Ἡ (1) γράφεται $y = -\frac{\alpha x + \gamma}{\beta}$ καὶ διὰ ἑκάστην τιμὴν τῆς x δίδει μίαν καὶ μόνον τιμὴν διὰ τὸ y καὶ ἀντιστρόφως.

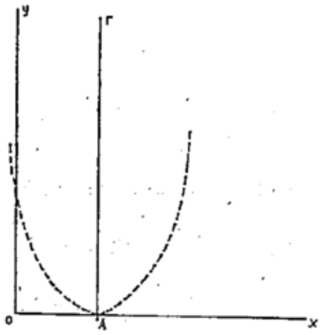
Σπουδὴ τῆς $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$. Διακρίνομεν δύο περιπτώσεις:

Περίπτωσις Ι. Νὰ εἶναι $\alpha > 0$. Τότε ὡς γνωστὸν τὸ τριώνυμον $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ διὰ $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$ ἔχει τὴν ἐλαχίστην του τιμὴν $y = \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha}$. Τὸ τριώνυμον δὲν ἔχει μέγιστον. Τὸ y ἐλαττοῦται ἀπὸ $+\infty$ ἕως $\frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha}$, ὅταν τὸ x αὐξάνει ἀπὸ $-\infty$ ἕως $-\frac{\beta}{2\alpha}$ καὶ αὐξάνει τὸ y ἀπὸ $\frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha}$ ἕως $+\infty$, ὅταν τὸ x αὐξάνει ἀπὸ $-\frac{\beta}{2\alpha}$ ἕως $+\infty$. Ἐὰν εἰς τὸ x δόσωμεν τιμὰς ἰσαπεχούσας τοῦ $-\frac{\beta}{2\alpha}$.

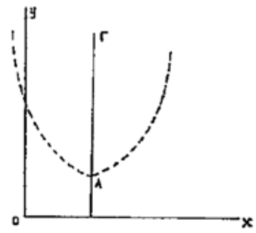
Π. χ. τὰς τιμὰς $x_1 = -\frac{\beta}{2\alpha} - \varepsilon$, $x_2 = -\frac{\beta}{2\alpha} + \varepsilon$ τὸ y λαμβάνει ἴσας τιμάς. Ἐκ τούτου συνάγομεν ὅτι ἡ γραμμὴ $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ εἶναι συμμετρικὴ ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$ ἥτις καλεῖται ἄξων συμμετρίας τῆς γραμμῆς. Ἵνα ἤδη κατασκευάσωμεν τὴν γραμμὴν τὴν ὁποίαν παριστᾶ ἡ $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ ἐργαζόμεθα οὕτω. Κατασκευάζομεν τὸ σημεῖον Α τὸ ἔχον συντεταγμένας:

$$A\left(x = -\frac{\beta}{2\alpha},\ \ y = \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha}\right).$$

Σχ. 1,



Σχ. 2.



Σχ. 3.

Τὸ σημεῖον τοῦτο καλεῖται κορυφὴ τῆς γραμμῆς τὴν ὁποίαν παριστᾷ ἡ συνάρτησις: $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$.

Τὸ σημεῖον A κεῖται κάτωθεν (σχ. 1), ἢ ἐπὶ (σχ. 2), ἢ ἄνωθεν (σχ. 3) τοῦ ἄξονος 0x καθ' ὅσον εἶναι $\beta^2 - 4\alpha\gamma > 0$, ἢ $\beta^2 - 4\alpha\gamma = 0$, ἢ $\beta^2 - 4\alpha\gamma < 0$, ἤτοι καθ' ὅσον τὸ τριώνυμον $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ ἔχει ρίζας πραγματικὰς ἀνίσους, ἢ ἴσας, ἢ ὄχι πραγματικάς.

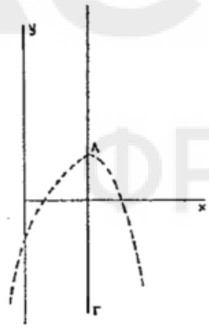
Εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν δύο σημεῖα τῆς γραμμῆς εἶναι τὰ Δ καὶ E, τὰ ὁποῖα ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰς ρίζας τοῦ τριωνύμου, ἤτοι: $\Delta(x = \varrho_1,\ y = 0)$, $E(x = \varrho_2,\ y = 0)$ ὑποτιθεμένου $\varrho_1 < \varrho_2$.

Μιὰ εὐθεῖα $Ax + By + \Gamma = 0$ τέμνει τὴν γραμμὴν $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ τὸ πολὺ εἰς δύο σημεῖα, διότι τὸ σύστημα $Ax + By + \Gamma = 0$, $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ ὡς δευτεροβάθμιον ἔχει τὸ πολὺ δύο λύσεις.

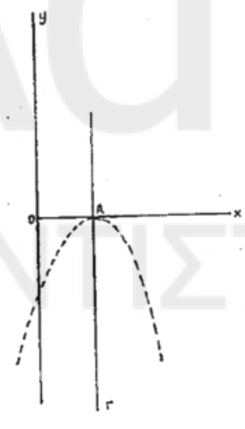
Ἐντεῦθεν συνάγομεν ὅτι ἡ γραμμὴ $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ εἶναι καμπύλη, ἤτοι ὅτι οὐδὲν τμῆμα αὐτῆς εἶναι εὐθύγραμμον.

Ἡ καμπύλη $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ καλεῖται παραβολὴ καὶ στρέφει τὰ κοῖλα πρὸς τὰ ἄνω.

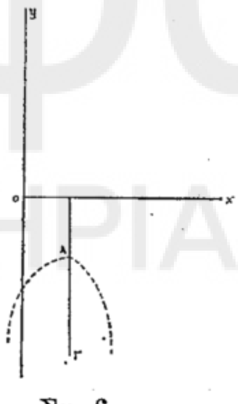
Περίπτωσις II. Ἐὰν εἶναι $\alpha < 0$. Ἡ περίπτωσις αὐτὴ ἐξετάζεται ὡς ἡ προηγουμένη, μὲ τὴν διαφορὰν ὅτι ἡ τιμὴ $x = -\dfrac{\beta}{2\alpha}$ δίδει διὰ τὸ τριώνυμον $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ τὸ μέγιστον ἴσον πρὸς $y = \dfrac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha}$.



Σχ. 4.



Σχ. 5.



Σχ. 6.

Ἐπίσης εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἔχομεν ὅτι τοῦ x αὐξανομένου ἀπὸ $-\infty$ ἕως $-\dfrac{\beta}{2\alpha}$, τὸ **y** αὐξάνει ἀπὸ $-\infty$ ἕως $\dfrac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha}$ καὶ τοῦ x αὐξανομένου ἀπὸ $-\dfrac{\beta}{2\alpha}$ ἕως $+\infty$ τὸ y ἐλαττοῦται ἀπὸ $\dfrac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha}$ ἕως $-\infty$. Οὕτως εἰς τὴν περίπτωσιν $\alpha < 0$, ἡ $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ παριστᾷ τὴν καμπύλην τοῦ σχήματος 4 ἢ 5 ἢ 6 καθ' ὅσον εἶναι $\beta^2 - 4\alpha\gamma > 0$ (σχ. 4), ἢ μηδὲν (σχ. 5), ἢ ἀρνητικὸν (σχ. 6).

β) • Αν $\alpha, \beta \neq 0$ (Αριστείδης Πάλλας)

Λύσις τοῦ συστήματος $\alpha x+\beta y+\gamma=0,\ y=\alpha x^2+\beta x+\gamma$.

Ἡ πρώτη δίδει $y=-\dfrac{\alpha x+\gamma}{\beta}$ ὅτε ἡ δευτέρα γίνεται:

$-\alpha x-\gamma=\alpha\beta x^2+\beta^2 x+\beta\gamma$, ἢ $\alpha\beta x^2+(\alpha+\beta^2)x+\beta\gamma+\gamma=0$ (1).

Ἡ διακρίνουσα αὐτῆς εἶναι:

$$\Delta\equiv(\alpha+\beta^2)^2-4\alpha\beta(\beta\gamma+\gamma)=(\alpha+\beta^2)^2-4\alpha\beta\gamma(\beta+1).$$

Ἐὰν εἶναι $\Delta>0$, ἡ εὐθεῖα $\alpha x+\beta y+\gamma=0$ τέμνει τὴν παραβολὴν $y=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ εἰς δύο σημεῖα τά:
$\left(x=\varrho_1,\ y=-\dfrac{\alpha\varrho_1+\gamma}{\beta}\right)$, $\left(x=\varrho_2,\ y=-\dfrac{\alpha\varrho_2+\gamma}{\beta}\right)$, ἔνθα ϱ_1, ϱ_2 αἱ ρίζαι τῆς (1).

Ἐὰν εἶναι $\Delta=0$, ἡ εὐθεῖα ἔχει μετὰ τῆς παραβολῆς ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον τὸ $\left(x=\varrho_1=\varrho_2,\ y=-\dfrac{\alpha\varrho_1+\gamma}{\beta}\right)$, ἔνθα ϱ_1, ϱ_2 αἱ ἴσαι ρίζαι τῆς (1) καὶ καλεῖται ἐφαπτομένη τῆς παραβολῆς. Ἐὰν εἶναι $\Delta<0$, ἡ εὐθεῖα οὐδὲν κοινὸν σημεῖον ἔχει μετὰ τῆς παραβολῆς, διότι αἱ ρίζαι τῆς (1) εἶναι μὴ πραγματικαί.

• Αν $\beta = 0$ και $\alpha \neq 0$

Η πρώτη δίνει την κατακόρυφη ευθεία (ε) : $x = -\dfrac{\gamma}{\alpha}$

Αντικαθιστώντας στη δεύτερη έχουμε $y = \alpha\left(-\dfrac{\gamma}{\alpha}\right)^2 + \gamma \iff y = \dfrac{\gamma^2}{\alpha} + \gamma$

άρα η ευθεία (ε) τέμνει την παραβολή στο σημείο $M\left(-\dfrac{\gamma}{\alpha}, \dfrac{\gamma^2}{\alpha} + \gamma\right)$

• Αν $\alpha = 0$ και $\beta \neq 0$

Η δεύτερη εξίσωση γίνεται $y = \beta x + \gamma \rightarrow$ ευθεία (η)

Η πρώτη δίνει την οριζόντια ευθεία (ε) : $y = -\dfrac{\gamma}{\beta}$

Αντικαθιστώντας στη δεύτερη έχουμε $-\dfrac{\gamma}{\beta} = \beta x + \gamma \iff x = \dfrac{-\beta\gamma - \gamma}{\beta^2}$

άρα οι ευθείες (ε) και (η) τέμνονται στο σημείο $N\left(\dfrac{-\beta\gamma - \gamma}{\beta^2}, -\dfrac{\gamma}{\beta}\right)$

• Αν $\alpha = \beta = 0$ και $\gamma \neq 0$

Η πρώτη εξίσωση είναι αδύνατη και το σύστημα αδύνατο.

• Αν $\alpha = \beta = \gamma = 0$

Η πρώτη εξίσωση γίνεται $0 = 0$

Η δεύτερη εξίσωση γίνεται $y = 0 \rightarrow$ άξονας x΄x

Λύσεις είναι όλα τα σημεία του άξονα x΄x.

Ζήτημα 2ο

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΙΣ ΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΔΥΟ ΠΡΩΤΟΒΑΘΜΙΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΜΕ ΔΥΟ ΑΓΝΩΣΤΟΥΣ.

α) Ἔστω τὸ σύστημα :

$$(\mathrm{A}): \left.\begin{array}{l} (1) : \alpha x + \beta\psi = \gamma \\ (2) : \alpha' x + \beta'\psi = \gamma' \end{array}\right\}$$

Τὴν ἀνωτέρω μορφὴν δύναται νὰ λάβῃ κάθε σύστημα πρώτου βαθμοῦ μὲ δύο ἀγνώστους. Τὰ α, β, γ, α', β', γ' συμβολίζουν δεδομένους πραγματικοὺς ἀριθμούς, τὰ δὲ x, ψ τοὺς ἀγνώστους.

I. Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ὅλοι οἱ ἀριθμοὶ $\alpha,\beta,\gamma,\alpha',\beta',\gamma'$ εἶναι διάφοροι τοῦ μηδενός. Ἀπὸ τὴν (1) εὑρίσκομεν :

$x = \frac{\gamma - \beta\psi}{\alpha}$ καὶ ἀντικαθιστῶντες τὸ x μὲ τὸ ἴσον του εἰς τὴν (2) τοῦ (A) ἔχομεν τὴν $(\alpha\beta' - \alpha'\beta)\psi = \alpha\gamma' - \alpha'\gamma$.

Ὥστε εἶναι :

$$(\mathrm{A}) \left\{\begin{array}{l} \alpha x + \beta\psi = \gamma \\ \alpha' x + \beta'\psi = \gamma' \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} x = \frac{\gamma - \beta\psi}{\alpha} \\ (\alpha\beta' - \alpha'\beta)\psi = \alpha\gamma' - \alpha'\gamma \end{array}\right\} \begin{array}{l} (3) \\ (4) \end{array} \quad (\mathrm{B})$$

Εἰς τὸ (B) ἡ ἐξίσωσις (4) εἶναι μὲ ἕνα μόνον ἄγνωστον. Ἐὰν λοιπὸν ἡ (4) εἶναι δυνατή, ἀδύνατος ἢ ἀόριστος, θὰ εἶναι καὶ τὸ σύστημα (B), ἄρα καὶ τὸ ἰσοδύναμόν του (A), δυνατόν, ἀδύνατον ἢ ἀόριστον ἀντιστοίχως.

1ον. Δυνατὴ εἶναι ἡ (4) ὅταν καὶ μόνον ὅταν εἶναι $\alpha\beta' - \alpha'\beta \neq 0$. Ἐπομένως **τὸ σύστημα (A) εἶναι δυνατὸν ὅταν καὶ μόνον ὅταν εἶναι $\alpha\beta' - \alpha'\beta \neq 0$.** Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἀπὸ τὴν (4) ἔχομεν : $\psi = \frac{\alpha\gamma' - \alpha'\gamma}{\alpha\beta' - \alpha'\beta}$. Ἐὰν θέσωμεν τὴν τιμὴν αὐτὴν τοῦ ψ εἰς τὴν (3), εὑρίσκομεν $x = \frac{\gamma\beta' - \gamma'\beta}{\alpha\beta' - \alpha'\beta}$. Παρατηροῦμεν ὅτι εἶναι $\alpha\beta' - \alpha'\beta \neq 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\alpha'} \neq \frac{\beta}{\beta'}$ (i)

2ον. Ἐὰν εἶναι $\alpha\beta' - \alpha'\beta = 0$ καὶ $\alpha\gamma' - \alpha'\gamma \neq 0$ ἡ ἐξίσωσις (4) εἶναι ἀδύνατος. Δὲν ὑπάρχει τιμὴ τοῦ ψ λύσις τῆς (4). Ὥστε καὶ ἀπὸ τὴν (3) δὲν θὰ ὑπάρχῃ λύσις της ὡς πρὸς x καὶ τὸ σύστημα (A) **εἶναι ἀδύνατον.**

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἔχομεν : $\alpha\beta' - \alpha'\beta = 0 \Leftrightarrow \alpha\beta' = \alpha'\beta \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\beta}{\beta'}$ καὶ $\alpha\gamma' - \alpha'\gamma \neq 0 \Leftrightarrow \alpha\gamma' \neq \alpha'\gamma \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\alpha'} \neq \frac{\gamma}{\gamma'}$, ἑπομένως εἶναι καί : $\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\beta}{\beta'} \neq \frac{\gamma}{\gamma'}$. (ii)

Ἐὰν θέσωμεν $\frac{\alpha}{\alpha'} = \rho$ θὰ ἔχωμεν $\alpha = \alpha'\rho$, $\beta = \beta'\rho$ καὶ $\gamma \neq \gamma'\rho$, ὡς ἐξάγεται ἀπὸ τὰς (ii). Ἡ ἐξίσωσις (1) τοῦ (A) γίνεται : $\rho(\alpha' x + \beta'\psi) = \gamma$ καὶ τὸ σύστημα (A) γράφεται : $\left.\begin{array}{r} \rho(\alpha' x + \beta'\psi) = \gamma \\ \alpha' x + \beta'\psi = \gamma' \end{array}\right\}$. Αἱ ἐξισώσεις αὐταὶ εἶναι ἀδύνατον νὰ ἀληθεύουν συγχρόνως, διότι εἶναι $\rho\gamma' \neq \gamma$. Δυνάμεθα νὰ λέγωμεν εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ὅτι αἱ ἐξισώσεις **εἶναι ἀσυμβίβαστοι.**

3ον. Ἐὰν εἶναι $\alpha\beta' - \alpha'\beta = 0$ καὶ $\alpha\gamma' - \alpha'\gamma = 0$ ἡ ἐξίσωσις (4) γίνεται ἀόριστος. Τὸ ψ δύναται νὰ λάβῃ κάθε τιμὴν εἰς τὸ R. Εἰς ἑκάστην τιμὴν τοῦ ψ ἀντιστοιχίζεται διὰ τῆς (3) τοῦ συστήματος (Β) μία μόνον τιμὴ τοῦ x. Τὸ σύστημα λοιπὸν (Β), ἄρα καὶ τὸ (Α) **ἔχει μίαν ἀπειρίαν λύσεων.** Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἔχομεν :

$$\alpha\beta' - \alpha'\beta = 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\beta}{\beta'} \quad \text{καὶ} \quad \alpha\gamma' - \alpha'\gamma = 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\gamma}{\gamma'},$$

δηλαδὴ $\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\beta}{\beta'} = \frac{\gamma}{\gamma'}$, (iii)

Ἐὰν μεταξὺ τῶν συντελεστῶν τοῦ (Α) ἰσχύῃ ἡ (iii), τότε τὸ σύστημα τοῦτο εἶναι ἀόριστον. Διότι ἐὰν θέσωμεν $\frac{\alpha}{\alpha'} = \rho$, ἀπὸ τὰς (iii) ἔχομεν $\alpha = \alpha'\rho$, $\beta = \beta'\rho$ καὶ $\gamma = \gamma'\rho$ καὶ αἱ ἐξισώσεις τοῦ (Α) γίνονται :

$$\left.\begin{aligned} \rho(\alpha'x + \beta'\psi) &= \rho\gamma' \\ \alpha'x + \beta'\psi &= \gamma' \end{aligned}\right\} \text{ αἱ ὁποῖαι συμπίπτουν εἰς μίαν μόνον ἐξίσωσιν,}$$

ἐπειδὴ εἶναι $\rho \neq 0$. Ἀλλὰ μία ἐξίσωσις πρώτου βαθμοῦ ὡς πρὸς x, ψ ἔχει ἀπείρους λύσεις (x, ψ) εἰς τὸ σύνολον R x R.

II. Ἐὰν εἶναι οἱ $\alpha, \beta, \alpha', \beta' \neq 0$ καὶ $\gamma = \gamma' = 0$. Ἐπειδὴ αἱ (3) καὶ (4) ἰσχύουν, εὑρίσκομεν ἀπὸ τὴν (4) ὅτι εἶναι $\psi = 0$ καὶ ἀπὸ τὴν (3) $x = 0$, ἐὰν εἶναι $\alpha\beta' \neq \alpha'\beta$, δηλαδὴ τὸ σύστημα (Α) εἶναι δυνατὸν καὶ ἔχει μίαν λύσιν τὴν $x = 0$, $\psi = 0$.

Ἐὰν εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν εἶναι $\alpha\beta' - \alpha'\beta = 0$, δηλ. $\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\beta}{\beta'}$, τὸ (Α) εἶναι ἀόριστον σύστημα.

III. Ἐὰν εἶναι $\alpha = \beta = 0$, τότε τὸ σύστημα (Α) γίνεται :

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \gamma \\ \alpha'x + \beta'\psi &= \gamma' \end{aligned}\right\} \text{ Ἐὰν εἶναι } \gamma = 0, \text{ τὸ (Α) περιορίζεται εἰς μίαν μόνον}$$

ἐξίσωσιν, τὴν $\alpha'x + \beta'\psi = \gamma'$, καὶ ἔχει ἀπείρους λύσεις. Ἐὰν ὅμως εἶναι $\gamma \neq 0$, τὸ σύστημα (Α) εἶναι ἀδύνατον.

Τὰ αὐτὰ συμπεράσματα ἔχομεν καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν κατὰ τὴν ὁποίαν εἶναι $\alpha' = \beta' = 0$.

IV. Ἐὰν εἶναι $\alpha = \alpha' = 0$, ἐξαφανίζεται ὁ ἕνας ἄγνωστος καὶ τὸ σύστημα γίνεται :

$$\left.\begin{aligned} \beta\psi &= \gamma \\ \beta'\psi &= \gamma' \end{aligned}\right\} \quad (\Gamma)$$

Ἐὰν εἶναι $\frac{\gamma}{\beta} = \frac{\gamma'}{\beta'}$, τὸ (Γ) ἔχει τὴν λύσιν :

$x \in R$ (δηλαδὴ x = ὁποιοσδήποτε ἀριθμὸς πραγματικὸς)

$\psi = \frac{\gamma}{\beta} = \frac{\gamma'}{\beta'}$, ἑπομένως εἶναι ἀόριστον.

Ἐὰν εἶναι $\frac{\gamma}{\beta} \neq \frac{\gamma'}{\beta'}$, τὸ (Γ) εἶναι ἀδύνατον.

V. Ἐὰν εἶναι $\alpha = \alpha' = \beta = \beta' = 0$, τὸ σύστημα (Α) γίνεται :

$$\left.\begin{aligned} 0x + 0\psi &= \gamma \\ 0x + 0\psi &= \gamma' \end{aligned}\right\} \text{ Ἐὰν εἶναι } \gamma = 0 \text{ καὶ } \gamma' = 0 \text{ ἔχομεν δύο ταυτότητας.}$$

Τὰ x, ψ λαμβάνουν καὶ τὰ δύο αὐθαιρέτους τιμὰς καὶ λέγομεν τώρα ὅτι τὸ (Α) ἔχει **διπλῆν ἀοριστίαν** λύσεων.

Ἐὰν ἕνα ἀπὸ τὰ γ καὶ γ' δὲν εἶναι μηδέν, τὸ σύστημα **εἶναι ἀδύνατον.**

Ἡ περίπτωσις $\alpha = \alpha' = \beta = \beta' = 0$ δύναται νὰ παρουσιασθῇ κατὰ τὴν μελέτην **παραμετρικῶν** συστημάτων. Π.χ. εἰς τὸ σύστημα :

$$\left.\begin{aligned} (\lambda + 1)x + (\lambda^2 - 1)\psi &= 24 \\ (\lambda^3 + 1)x - (\lambda + 1)\psi &= 17 \end{aligned}\right\} \text{ διὰ } \lambda = -1.$$

Συμπέρασμα. Τὸ σύστημα $\left.\begin{aligned} \alpha x + \beta\psi &= \gamma \\ \alpha'x + \beta'\psi &= \gamma' \end{aligned}\right\}$ ἔχει μίαν λύσιν καὶ μόνον μίαν,

τὴν $x = \frac{\gamma\beta' - \gamma'\beta}{\alpha\beta' - \alpha'\beta}$, $\psi = \frac{\alpha\gamma' - \alpha'\gamma}{\alpha\beta' - \alpha'\beta}$, ὅταν, καὶ μόνον ὅταν, εἶναι $\alpha\beta' - \alpha'\beta \neq 0$.

Ἐὰν εἶναι $\alpha\beta' - \alpha'\beta = 0$ καὶ $\alpha\gamma' - \alpha'\gamma \neq 0$ τὸ σύστημα εἶναι ἀδύνατον.

Ἐὰν εἶναι $\alpha\beta' - \alpha'\beta = 0$ καὶ $\alpha\gamma' - \alpha'\gamma = 0$ τὸ σύστημα εἶναι ἀόριστον.

Ζήτημα 3ο

$$\begin{cases} \alpha\cdot(x - y + \beta) + \beta^2 = \beta y \\ \alpha\cdot(y - \alpha - \beta) + \beta x = \beta y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha x - \alpha y + \alpha\beta + \beta^2 = \beta y \\ \alpha y - \alpha^2 - \alpha\beta + \beta x = \beta y \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \alpha x - \alpha y - \beta y = -\alpha\beta - \beta^2 \\ \beta x + \alpha y - \beta y = \alpha^2 + \alpha\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha x - (\alpha + \beta)y = -\beta(\alpha + \beta) \\ \beta x + (\alpha - \beta)y = \alpha(\alpha + \beta) \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} \alpha & -(\alpha+\beta) \\ \beta & \alpha - \beta \end{vmatrix} = \alpha(\alpha - \beta) + \beta(\alpha + \beta) = \alpha^2 \cancel{-\alpha\beta} \cancel{+\alpha\beta} + \beta^2 = \alpha^2 + \beta^2$$

$$D_x = \begin{vmatrix} -\beta(\alpha+\beta) & -(\alpha+\beta) \\ \alpha(\alpha+\beta) & \alpha - \beta \end{vmatrix} = -\beta(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) + \alpha(\alpha + \beta)^2$$

$$= (\alpha + \beta)\cdot\left[-\beta(\alpha - \beta) + \alpha(\alpha + \beta)\right]$$

$$= (\alpha + \beta)\cdot(\cancel{-\alpha\beta} + \beta^2 + \alpha^2 \cancel{+\alpha\beta}) = (\alpha + \beta)\cdot(\alpha^2 + \beta^2)$$

$$D_y = \begin{vmatrix} \alpha & -\beta(\alpha+\beta) \\ \beta & \alpha(\alpha+\beta) \end{vmatrix} = \alpha^2(\alpha + \beta) + \beta^2(\alpha + \beta) = (\alpha + \beta)\cdot(\alpha^2 + \beta^2)$$

- Αν $\alpha \neq 0$ ή $\beta \neq 0$ τότε $D \neq 0$ και το σύστημα έχει μοναδική λύση

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{D_x}{D} = \frac{(\alpha+\beta)\cdot\cancel{(\alpha^2+\beta^2)}}{\cancel{\alpha^2+\beta^2}} = \alpha + \beta \\ y &= \frac{D_y}{D} = \frac{(\alpha+\beta)\cdot\cancel{(\alpha^2+\beta^2)}}{\cancel{\alpha^2+\beta^2}} = \alpha + \beta \end{aligned}\right\} \Rightarrow (x , y) = (\alpha + \beta , \alpha + \beta)$$

- Αν $\alpha = \beta = 0$, τότε $D = D_x = D_y = 0$

  και το σύστημα γίνεται $\begin{cases} 0x + 0y = 0 \\ 0x + 0y = 0 \end{cases}$

  το οποίο έχει λύση κάθε ζεύγος $(x , y) \in IR^2$