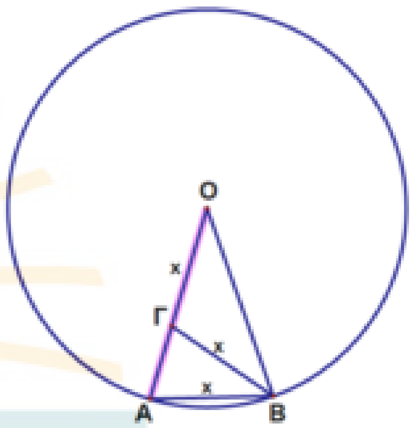
ΓΕΝΙΚΕΣ ΕΙΣΙΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 1967
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΟΣ ΚΥΚΛΟΣ – ΦΥΣΙΚΟΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ ΚΥΚΛΟΣ – ΓΕΩΠΟΝΟΔΑΣΟΛΟΓΙΚΟΣ ΚΥΚΛΟΣ

Δευτέρα 11 Σεπτεμβρίου 1967

Ζήτημα 1ο



Έστω $AB = x$ η ζητούμενη πλευρά του κανονικού δεκαγώνου.

Είναι $A\hat{O}B = 36^0$ και $O\hat{A}B = O\hat{B}A = 72^0$.

Φέρουμε τη διχοτόμο ΒΓ της $O\hat{B}A$, άρα $O\hat{B}\Gamma = A\hat{B}\Gamma = 36^0$.

Τα $\overset{\Delta}{B\Gamma O}$ και $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ είναι ισοσκελή, άρα $AB = B\Gamma = O\Gamma = x$.

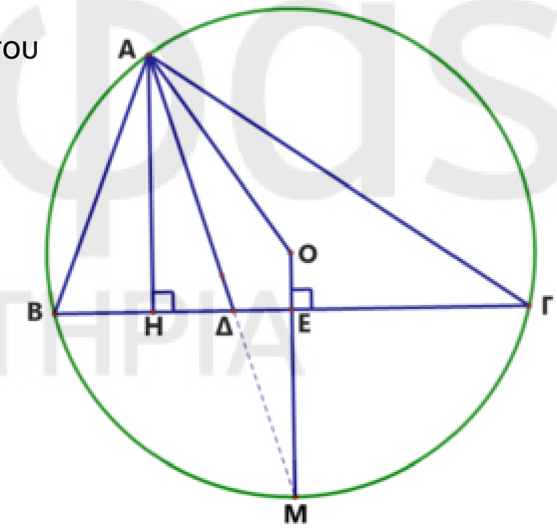
Από θεώρημα εσωτερικής διχοτόμου είναι :

$$\frac{O\Gamma}{A\Gamma} = \frac{OB}{AB} \Leftrightarrow \frac{x}{R - x} = \frac{R}{x} \Leftrightarrow x^2 = R^2 - Rx \Leftrightarrow$$

$$x^2 + Rx - R^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-R \pm R\sqrt{5}}{2}$$

Η $x = \dfrac{-R - R\sqrt{5}}{2} < 0$ απορρίπτεται, άρα $x = \dfrac{-R + R\sqrt{5}}{2}$ ή $\mathbf{x = \dfrac{R}{2}\left(-1 + \sqrt{5}\right)}$

Ζήτημα 2ο



Έστω $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ το ζητούμενο τρίγωνο, ΑΗ το ύψος του και Ο το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του.

Αν Μ είναι το μέσο του $\overset{\frown}{B\Gamma}$, τότε :

$$H\hat{A}\Delta = \frac{\hat{B} - \hat{\Gamma}}{2} = \frac{\omega}{2} \overset{OM//AH}{\Rightarrow} H\hat{A}\Delta = O\hat{M}A = \frac{\omega}{2}$$

$\overset{\Delta}{OMA}$ ισοσκελές $\Rightarrow O\hat{A}M = O\hat{M}A = \dfrac{\omega}{2}$

Στο ορθογώνιο $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ γνωρίζουμε την υποτείνουσα

$A\Delta = \delta$ και μια οξεία γωνία $H\hat{A}\Delta = \dfrac{\omega}{2}$,

άρα το ύψος $AH = \upsilon$ είναι κατασκευάσιμο.

Επίσης $\beta \cdot \gamma = 2R \cdot \upsilon \Rightarrow \beta^2 \cdot \gamma^2 = 4R^2 \cdot \upsilon^2 \Rightarrow \delta^4 + \kappa^4 = 4R^2 \cdot \upsilon^2 \Rightarrow$

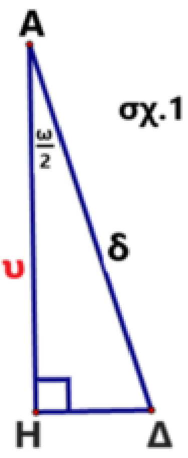
$$R^2 = \frac{\delta^4 + \kappa^4}{4\upsilon^2} \Rightarrow R = \sqrt{\frac{\delta^4 + \kappa^4}{4\upsilon^2}} \Rightarrow R = \frac{\sqrt{\delta^4 + \kappa^4}}{2\upsilon},$$

άρα το R είναι κατασκευάσιμο.

Επιμέρους κατασκευές

- Κατασκευή του ύψους $υ$ (σχ.1)

Το ύψος $υ$ κατασκευάζεται ως κάθετη πλευρά σε ορθογώνιο τρίγωνο με υποτείνουσα $δ$ και μια οξεία γωνία $\frac{ω}{2}$.

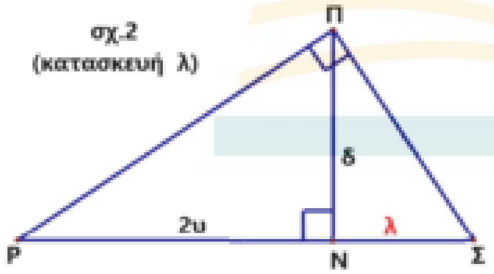


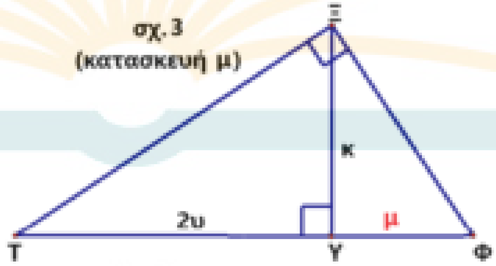
- Κατασκευή της ακτίνας R

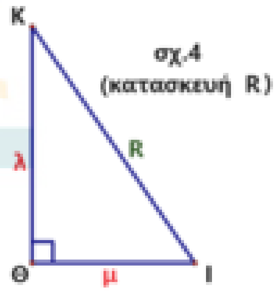
1^{ος} τρόπος

$$β\cdot γ = 2R\cdot υ \Rightarrow β^2\cdot γ^2 = 4R^2\cdot υ^2 \Rightarrow δ^4 + κ^4 = 4R^2\cdot υ^2 \Rightarrow R^2 = \frac{δ^4 + κ^4}{4υ^2} \Rightarrow$$

$$R = \sqrt{\frac{δ^4 + κ^4}{4υ^2}} \Rightarrow R = \sqrt{\left(\frac{δ^2}{2υ}\right)^2 + \left(\frac{κ^2}{2υ}\right)^2} \overset{λ = \frac{δ^2}{2υ}}{\underset{μ = \frac{κ^2}{2υ}}{\Longrightarrow}} R = \sqrt{λ^2 + μ^2}.$$







Το $λ$ κατασκευάζεται αφού $δ^2 = 2υ\cdot λ$, δηλαδή το $δ$ μέση ανάλογος των $λ$, $2υ$ (σχ.2).
Το $μ$ κατασκευάζεται αφού $κ^2 = 2υ\cdot μ$, δηλαδή το $κ$ μέση ανάλογος των $μ$, $2υ$ (σχ.3).
Το R κατασκευάζεται ως υποτείνουσα σε ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες $λ$, $μ$ (σχ.4).

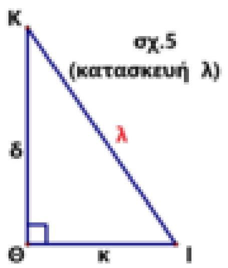
2^{ος} τρόπος

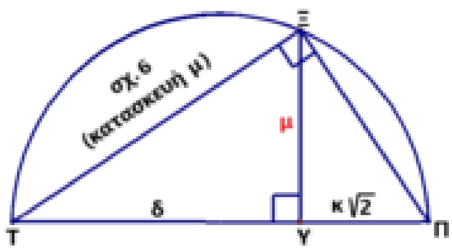
$$β\cdot γ = 2R\cdot υ \Rightarrow β^2\cdot γ^2 = 4R^2\cdot υ^2 \Rightarrow δ^4 + κ^4 = 4R^2\cdot υ^2 \Rightarrow$$

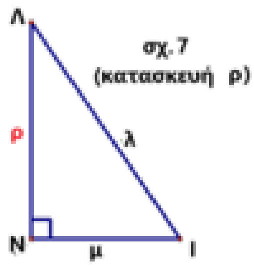
$$(δ^2 + κ^2)^2 - 2δ^2\cdot κ^2 = 4R^2\cdot υ^2 \overset{δ^2 + κ^2 = λ^2}{\Longrightarrow} λ^4 - 2δ^2\cdot κ^2 = 4R^2\cdot υ^2 \Rightarrow$$

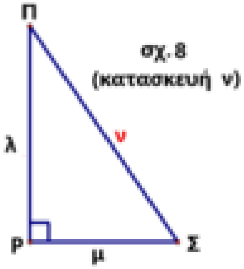
$$(λ^2 - \sqrt{2}δ\cdot κ)\cdot(λ^2 + \sqrt{2}δ\cdot κ) = 4R^2\cdot υ^2 \overset{\sqrt{2δ\cdot κ} = μ^2}{\Longrightarrow} (λ^2 - μ^2)\cdot(λ^2 + μ^2) = 4R^2\cdot υ^2 \overset{λ^2 - μ^2 = ν^2}{\underset{λ^2 + μ^2 = ρ^2}{\Longrightarrow}}$$

$$ν^2\cdot ρ^2 = 4R^2\cdot υ^2 \Rightarrow ν\cdot ρ = 2R\cdot υ \Rightarrow R = \frac{ν\cdot ρ}{2υ}.$$









Το λ κατασκευάζεται ως υποτείνουσα σε ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες δ, κ (σχ.5).

Το μ κατασκευάζεται αφού ως μέση ανάλογος των δ, $\kappa\sqrt{2}$ (σχ.6).

Το ρ κατασκευάζεται ως κάθετη σε ορθογώνιο τρίγωνο με υποτείνουσα λ και άλλη κάθετη την μ (σχ.7).

Το ν κατασκευάζεται ως υποτείνουσα σε ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες λ, μ (σχ.8).

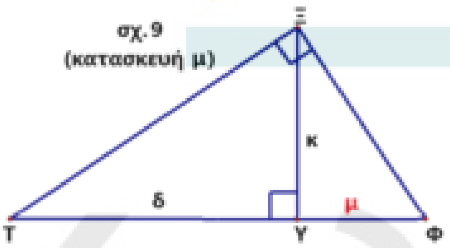
Τέλος το R κατασκευάζεται ως 4^{η} ανάλογος των 2υ, ρ, ν.

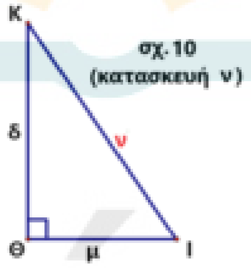
$3^{ος}$ τρόπος

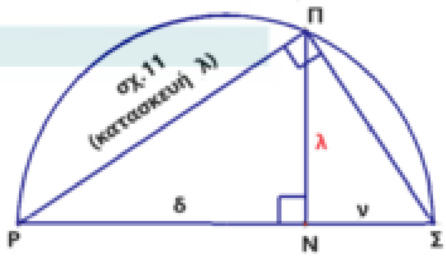
$$\beta\cdot\gamma = 2R\cdot\upsilon \Rightarrow \beta^2\cdot\gamma^2 = 4R^2\cdot\upsilon^2 \Rightarrow \delta^4 + \kappa^4 = 4R^2\cdot\upsilon^2 \Rightarrow$$

$$\delta^2\cdot\left(\delta^2 + \frac{\kappa^4}{\delta^2}\right) = 4R^2\cdot\upsilon^2 \Rightarrow \delta^2\cdot\left(\delta^2 + \left(\frac{\kappa^2}{\delta}\right)^2\right) = 4R^2\cdot\upsilon^2 \overset{\frac{\kappa^2}{\delta}=\mu}{\Rightarrow}$$

$$\delta^2\cdot\left(\delta^2+\mu^2\right) = 4R^2\cdot\upsilon^2 \overset{\delta^2+\mu^2=\nu^2}{\Rightarrow} \delta^2\cdot\nu^2 = 4R^2\cdot\upsilon^2 \Rightarrow \delta\cdot\nu = 2R\cdot\upsilon \overset{\delta\cdot\nu=\lambda^2}{\Rightarrow} R = \frac{\lambda^2}{2\upsilon}.$$





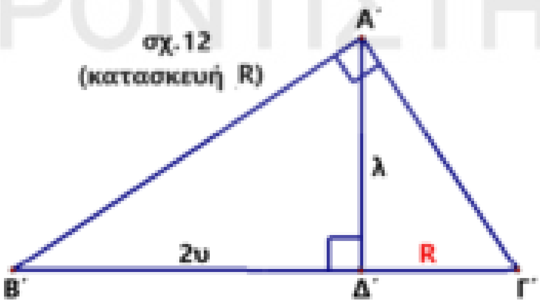


Το μ κατασκευάζεται αφού $\kappa^2 = \delta\cdot\lambda$, δηλαδή το κ μέση ανάλογος των μ, δ (σχ.9).

Το ν κατασκευάζεται ως υποτείνουσα σε ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες δ, μ (σχ.10).

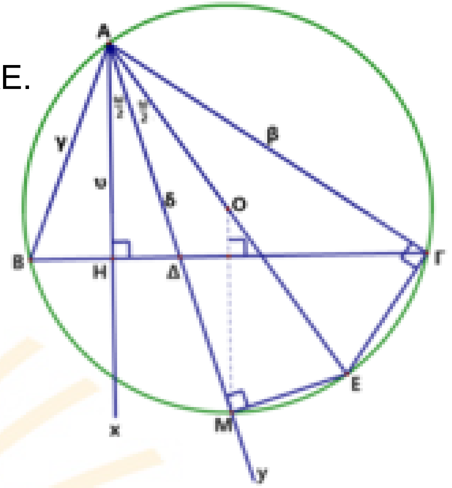
Το λ κατασκευάζεται αφού ως μέση ανάλογος των δ, ν (σχ.11).

Τέλος το R κατασκευάζεται αφού $\lambda^2 = R\cdot 2\upsilon$, δηλαδή το λ μέση ανάλογος των R, 2υ (σχ.12).



Κατασκευή του τριγώνου ΑΒΓ

$1^{ος}$ τρόπος



Σε κύκλο ακτίνας $R = \dfrac{\sqrt{\delta^4 + \kappa^4}}{2\upsilon}$ γράφουμε μια διάμετρο ΑΕ.

Στο ίδιο ημικύκλιο παίρνουμε ημιευθείες Αx και Αy,

τέτοιες ώστε $x\hat{A}y = y\hat{A}E = \dfrac{\omega}{2}$.

Επί της Αy παίρνουμε σημείο Δ, τέτοιο ώστε ΑΔ = δ.

Από το Δ φέρουμε ευθεία κάθετη στην Αx

η οποία τέμνει τον κύκλο στα σημεία Β και Γ.

Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι το ζητούμενο.

Απόδειξη

Αν ΑΗ το ύψος του τριγώνου, τότε $H\hat{A}\Delta = \dfrac{\omega}{2} = \dfrac{B - \Gamma}{2}$

$$B\hat{A}\Delta = B\hat{A}H + H\hat{A}\Delta = 90^0 - B + \frac{B - \Gamma}{2} = \frac{180^0 - B - \Gamma}{2} = \frac{A}{2},$$

άρα η ΑΔ είναι η διχοτόμος του τριγώνου ΑΒΓ με μήκος ΑΔ = δ από κατασκευή.

Είναι $\overset{\Delta}{AHB} \approx \overset{\Delta}{A\Gamma E}$ (διότι είναι ορθογώνια με $\hat{B} = \hat{E}$), άρα $\dfrac{AH}{A\Gamma} = \dfrac{AB}{AE} \Leftrightarrow$

$$\frac{\upsilon}{\beta} = \frac{\gamma}{2R} \Leftrightarrow \beta \cdot \gamma = 2R\upsilon \Rightarrow \beta \cdot \gamma = 2\frac{\sqrt{\delta^4 + \kappa^4}}{2\upsilon}\upsilon \Leftrightarrow \beta \cdot \gamma = \sqrt{\delta^4 + \kappa^4} \Leftrightarrow \beta^2 \cdot \gamma^2 = \delta^4 + \kappa^4$$

Διερεύνηση

- Πρέπει $\omega = B - \Gamma < 180^0$
- Για να κατασκευαστεί το τρίγωνο αρκεί η ευθεία ΒΓ που φέρουμε από το Δ να τέμνει τον κύκλο, δηλαδή το Δ να βρίσκεται εντός του κύκλου ή $A\Delta < AM$.

  Είναι $\overset{\Delta}{AH\Delta} \approx \overset{\Delta}{AME}$ (διότι είναι ορθογώνια με $\Delta\hat{A}H = M\hat{A}E = \dfrac{\omega}{2}$), άρα

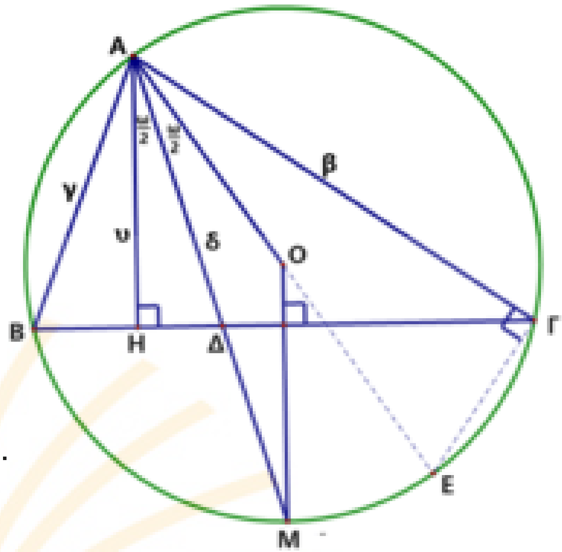
$$\frac{AH}{AM} = \frac{A\Delta}{AE} \Leftrightarrow \frac{\upsilon}{AM} = \frac{\delta}{2R} \Leftrightarrow AM \cdot \delta = 2R\upsilon \overset{R = \frac{\sqrt{\delta^4 + \kappa^4}}{2\upsilon}}{\Rightarrow} AM \cdot \delta = \sqrt{\delta^4 + \kappa^4} \Leftrightarrow$$

$$AM = \frac{\sqrt{\delta^4 + \kappa^4}}{\delta} \Leftrightarrow AM = \sqrt{\frac{\delta^4 + \kappa^4}{\delta^2}} \Leftrightarrow AM = \sqrt{\delta^2 + \frac{\kappa^4}{\delta^2}} > \delta = A\Delta.$$

Επομένως μοναδική προϋπόθεση είναι $\boldsymbol{\omega = B - \Gamma < 180^0}$

Κατασκευή του τριγώνου ΑΒΓ

$2^{ος}$ τρόπος



Κατασκευάζουμε ορθογώνιο τρίγωνο $\overset{\Delta}{\mathrm{AH\Delta}}$,

με $\hat{H} = 90^0$, $A\Delta = \delta$ και $\Delta\hat{A}H = \frac{\omega}{2}$.

Εκτός του $\overset{\Delta}{\mathrm{AH\Delta}}$ κατασκευάζουμε τμήμα

$AO = R = \frac{\sqrt{\delta^4 + \kappa^4}}{2\upsilon}$, με $O\hat{A}\Delta = \Delta\hat{A}H = \frac{\omega}{2}$.

Με κέντρο το Ο και ακτίνα R γράφουμε κύκλο.

Η ευθεία ΗΔ τέμνει τον κύκλο στα σημεία Β και Γ.

Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι το ζητούμενο.

Απόδειξη

Αν η ΑΔ τέμνει τον κύκλο στο Μ, τότε το $\overset{\Delta}{\mathrm{OAM}}$ είναι ισοσκελές και

$O\hat{A}\Delta = O\hat{M}\Delta = \frac{\omega}{2} = H\hat{A}\Delta$, άρα $AH // OM$, άρα $OM \perp B\Gamma$ και Μ είναι το μέσο του $\overset{\frown}{B\Gamma}$.

Τότε η ΑΔ είναι η διχοτόμος του τριγώνου ΑΒΓ με μήκος $A\Delta = \delta$ από κατασκευή.

Είναι $\overset{\Delta}{\mathrm{AHB}} \approx \overset{\Delta}{\mathrm{A\Gamma E}}$ (διότι είναι ορθογώνια με $\hat{B} = \hat{E}$), άρα $\frac{AH}{A\Gamma} = \frac{AB}{AE} \Leftrightarrow$

$$\frac{\upsilon}{\beta} = \frac{\gamma}{2R} \Leftrightarrow \beta\cdot\gamma = 2R\upsilon \Rightarrow \beta\cdot\gamma = 2\frac{\sqrt{\delta^4 + \kappa^4}}{2\upsilon}\upsilon \Leftrightarrow \beta\cdot\gamma = \sqrt{\delta^4 + \kappa^4} \Leftrightarrow \beta^2\cdot\gamma^2 = \delta^4 + \kappa^4$$

Διερεύνηση

- Πρέπει $\omega = B - \Gamma < 180^0$
- Για να κατασκευαστεί το τρίγωνο αρκεί η ευθεία ΒΓ που φέρουμε από το Δ να τέμνει τον κύκλο, δηλαδή το Δ να βρίσκεται εντός του κύκλου ή $A\Delta < AM$.

  Είναι $\overset{\Delta}{\mathrm{AH\Delta}} \approx \overset{\Delta}{\mathrm{AME}}$ (διότι είναι ορθογώνια με $\Delta\hat{A}H = M\hat{A}E = \frac{\omega}{2}$), άρα

$$\frac{AH}{AM} = \frac{A\Delta}{AE} \Leftrightarrow \frac{\upsilon}{AM} = \frac{\delta}{2R} \Leftrightarrow AM\cdot\delta = 2R\upsilon \overset{R = \frac{\sqrt{\delta^4 + \kappa^4}}{2\upsilon}}{\Rightarrow} AM\cdot\delta = \sqrt{\delta^4 + \kappa^4} \Leftrightarrow$$

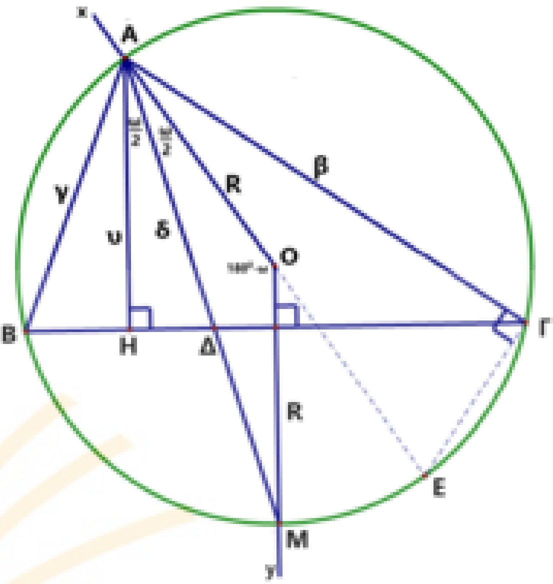
$$AM = \frac{\sqrt{\delta^4 + \kappa^4}}{\delta} \Leftrightarrow AM = \sqrt{\frac{\delta^4 + \kappa^4}{\delta^2}} \Leftrightarrow AM = \sqrt{\delta^2 + \frac{\kappa^4}{\delta^2}} > \delta = A\Delta.$$

Επομένως μοναδική προϋπόθεση είναι $\boldsymbol{\omega = B - \Gamma < 180^0}$

Κατασκευή του τριγώνου ΑΒΓ

$3^{ος}$ τρόπος

Κατασκευάζουμε γωνία $x\hat{O}y = 180^0 - \omega$,
και επί των πλευρών της Οx και Οy παίρνουμε σημεία
Α και Μ αντίστοιχα, ώστε $OA = OM = R = \dfrac{\sqrt{\delta^4 + \kappa^4}}{2\upsilon}$.
Με κέντρο το Ο και ακτίνα R γράφουμε κύκλο.
Στην ΑΜ παίρνουμε τμήμα $A\Delta = \delta$.
Από το Δ φέρουμε ευθεία κάθετη στην ΟΜ,
η οποία τέμνει τον κύκλο στα σημεία Β και Γ.
Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι το ζητούμενο.



Απόδειξη

Αν ΑΗ το ύψος του $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$, τότε το $\overset{\Delta}{OAM}$ είναι ισοσκελές με $A\hat{O}M = 180^0 - \omega$, άρα

$O\hat{A}\Delta = O\hat{M}\Delta = \dfrac{\omega}{2} \overset{AH//OM}{\Rightarrow} H\hat{A}\Delta = O\hat{M}\Delta = \dfrac{\omega}{2}$, άρα $O\hat{A}\Delta = H\hat{A}\Delta = \dfrac{\omega}{2}$.

$B\hat{A}\Delta = B\hat{A}H + H\hat{A}\Delta = 90^0 - B + \dfrac{B - \Gamma}{2} = \dfrac{180^0 - B - \Gamma}{2} = \dfrac{A}{2}$, άρα

η ΑΔ είναι η διχοτόμος του τριγώνου ΑΒΓ με μήκος $A\Delta = \delta$ από κατασκευή.
Αν Ε είναι το αντιδιαμετρικό σημείο του Α, τότε είναι

$\overset{\Delta}{AHB} \approx \overset{\Delta}{A\Gamma E}$ (διότι είναι ορθογώνια με $\hat{B} = \hat{E}$), άρα $\dfrac{AH}{A\Gamma} = \dfrac{AB}{AE} \Leftrightarrow$

$$\frac{\upsilon}{\beta} = \frac{\gamma}{2R} \Leftrightarrow \beta\cdot\gamma = 2R\upsilon \Rightarrow \beta\cdot\gamma = 2\frac{\sqrt{\delta^4 + \kappa^4}}{2\upsilon}\upsilon \Leftrightarrow \beta\cdot\gamma = \sqrt{\delta^4 + \kappa^4} \Leftrightarrow \beta^2\cdot\gamma^2 = \delta^4 + \kappa^4$$

Διερεύνηση

- Πρέπει $\omega = B - \Gamma < 180^0$
- Για να κατασκευαστεί το τρίγωνο αρκεί η ευθεία ΒΓ που φέρουμε από το Δ να τέμνει τον κύκλο, δηλαδή το Δ να βρίσκεται εντός του κύκλου ή $A\Delta < AM$.

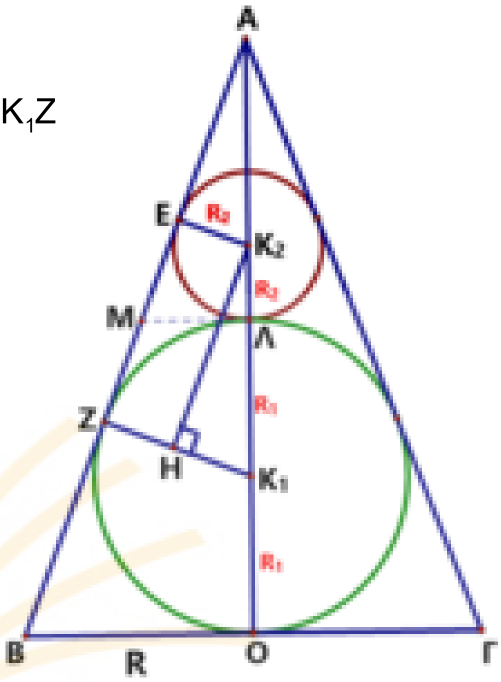
  Είναι $\overset{\Delta}{AH\Delta} \approx \overset{\Delta}{AME}$ (διότι είναι ορθογώνια με $\Delta\hat{A}H = M\hat{A}E = \dfrac{\omega}{2}$), άρα

$$\frac{AH}{AM} = \frac{A\Delta}{AE} \Leftrightarrow \frac{\upsilon}{AM} = \frac{\delta}{2R} \Leftrightarrow AM\cdot\delta = 2R\upsilon \overset{R = \frac{\sqrt{\delta^4 + \kappa^4}}{2\upsilon}}{\Rightarrow} AM\cdot\delta = \sqrt{\delta^4 + \kappa^4} \Leftrightarrow$$

$$AM = \frac{\sqrt{\delta^4 + \kappa^4}}{\delta} \Leftrightarrow AM = \sqrt{\frac{\delta^4 + \kappa^4}{\delta^2}} \Leftrightarrow AM = \sqrt{\delta^2 + \frac{\kappa^4}{\delta^2}} > \delta = A\Delta.$$

Επομένως μοναδική προϋπόθεση είναι $\mathbf{\omega = B - \Gamma < 180^0}$

Ζήτημα 3ο



Τέμνουμε τον κώνο με επίπεδο που διέρχεται από τα κέντρα K_1 και K_2 των σφαιρών (σχήμα).
Φέρνουμε τις ακτίνες $K_1Z = R_1$, $K_2E = R_1$, την $K_2H \perp K_1Z$ και την κοινή εσωτερική εφαπτομένη ΛΜ.

$\overset{\Delta}{AK_1Z} \approx \overset{\Delta}{AK_2E}$ (ορθογώνια με $B\hat{A}O$ κοινή) $\Rightarrow$

$$\frac{AK_1}{R_1} = \frac{AK_2}{R_2} = \frac{AK_1 - AK_2}{R_1 - R_2} = \frac{K_1K_2}{R_1 - R_2} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 - R_2} \quad (1)$$

<u>Εύρεση του ύψους ΑΟ = υ του κώνου</u>

1ος τρόπος

$$(1) \Rightarrow \frac{AK_1}{R_1} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 - R_2} \Rightarrow AK_1 = \frac{R_1^2 + R_1R_2}{R_1 - R_2}$$

$$υ = AK_1 + K_1O = \frac{R_1^2 + R_1R_2}{R_1 - R_2} + R_1 \Rightarrow υ = \frac{2R_1^2}{R_1 - R_2} \quad (2)$$

2ος τρόπος

$$(1) \Rightarrow \frac{AK_2}{R_2} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 - R_2} \Rightarrow AK_2 = \frac{R_2^2 + R_1R_2}{R_1 - R_2}$$

$$υ = AK_2 + K_2Λ + ΛO = \frac{R_2^2 + R_1R_2}{R_1 - R_2} + R_2 + 2R_1 \Rightarrow υ = \frac{2R_1^2}{R_1 - R_2} \quad (2)$$

3ος τρόπος

$$(1) \Rightarrow \frac{AK_1}{R_1} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 - R_2} \Rightarrow \frac{AK_1 + R_1}{R_1} = \frac{R_1 + R_2 + R_1 - R_2}{R_1 - R_2} \Rightarrow υ = \frac{2R_1^2}{R_1 - R_2} \quad (2)$$

Πυθαγόρειο θεώρημα στο $\overset{\Delta}{HK_1K_2}$: $K_2H^2 = K_1K_2^2 - HK_1^2 \Leftrightarrow$

$$EZ^2 = (R_1 + R_2)^2 - (R_1 - R_2)^2 \Leftrightarrow EZ^2 = 4R_1R_2 \Leftrightarrow EZ = 2\sqrt{R_1R_2} \quad (3)$$

$\overset{\Delta}{AK_1Z} \approx \overset{\Delta}{AK_2E}$ (ορθογώνια με $B\hat{A}O$ κοινή) $\Rightarrow$

$$\frac{AZ}{R_1} = \frac{AE}{R_2} = \frac{AZ - AE}{R_1 - R_2} = \frac{EZ}{R_1 - R_2} \overset{(3)}{=} \frac{2\sqrt{R_1R_2}}{R_1 - R_2} \quad (4)$$

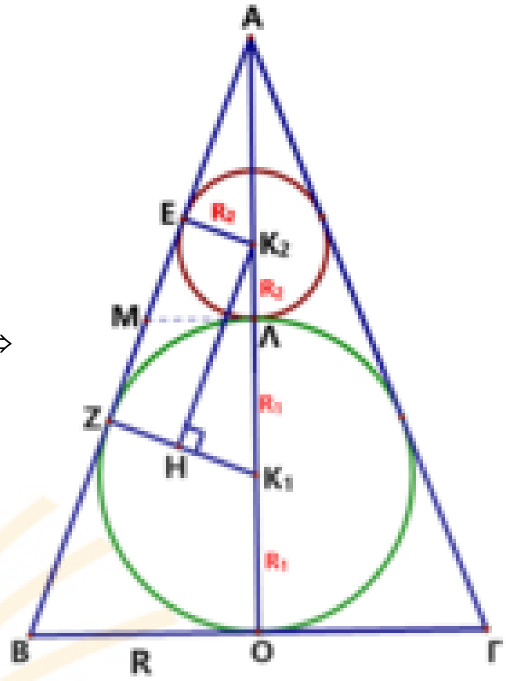
Εύρεση της ακτίνας R της βάσης του κώνου

$1^{ος}$ τρόπος

$$(4) \Rightarrow \frac{AZ}{R_1} = \frac{2\sqrt{R_1R_2}}{R_1 - R_2} \Rightarrow AZ = \frac{2R_1\sqrt{R_1R_2}}{R_1 - R_2}$$

$$\overset{\Delta}{AOB} \approx \overset{\Delta}{AZK_1} \Rightarrow \frac{OB}{R_1} = \frac{AO}{AZ} \Rightarrow \frac{OB}{R_1} = \frac{\dfrac{2R_1^{\,2}}{R_1 - R_2}}{\dfrac{2R_1\sqrt{R_1R_2}}{R_1 - R_2}} \Rightarrow$$

$$OB = R = \frac{R_1^{\,2}}{\sqrt{R_1R_2}} \quad (5)$$



$2^{ος}$ τρόπος

$$(4) \Rightarrow \frac{AE}{R_2} = \frac{2\sqrt{R_1R_2}}{R_1 - R_2} \Rightarrow AE = \frac{2R_2\sqrt{R_1R_2}}{R_1 - R_2}$$

$$\overset{\Delta}{AOB} \approx \overset{\Delta}{AEK_2} \Rightarrow \frac{OB}{R_2} = \frac{AO}{AE} \Rightarrow \frac{OB}{R_2} = \frac{\dfrac{2R_1^{\,2}}{R_1 - R_2}}{\dfrac{2R_2\sqrt{R_1R_2}}{R_1 - R_2}} \Rightarrow OB = R = \frac{R_1^{\,2}}{\sqrt{R_1R_2}} \quad (5)$$

$3^{ος}$ τρόπος

Είναι $M\Lambda = MZ = ME = \dfrac{EZ}{2} \overset{(3)}{=} \sqrt{R_1R_2}$

$$A\Lambda = AK_2 + K_2\Lambda = \frac{R_2^{\,2} + R_1R_2}{R_1 - R_2} + R_2 \Rightarrow A\Lambda = \frac{2R_1R_2}{R_1 - R_2}$$

$$\overset{\Delta}{AOB} \approx \overset{\Delta}{A\Lambda M} \Rightarrow \frac{OB}{M\Lambda} = \frac{AO}{A\Lambda} \Rightarrow \frac{OB}{\sqrt{R_1R_2}} = \frac{\dfrac{2R_1^{\,2}}{R_1 - R_2}}{\dfrac{2R_1R_2}{R_1 - R_2}} \Rightarrow OB = R = \frac{R_1^{\,2}}{\sqrt{R_1R_2}} \quad (5)$$

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot R^2 \cdot υ \underset{(5)}{\overset{(2)}{\Rightarrow}} V = \frac{1}{3}\pi \cdot \left(\frac{R_1^{\,2}}{\sqrt{R_1R_2}}\right)^2 \cdot \frac{2R_1^{\,2}}{R_1 - R_2} \Leftrightarrow V = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{R_1^{\,4}}{R_1R_2} \cdot \frac{2R_1^{\,2}}{R_1 - R_2} \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\mathbf{V = \frac{2\pi \cdot R_1^{\,5}}{3R_2 \cdot (R_1 - R_2)}}}$$