ΓΕΝΙΚΕΣ ΕΙΣΙΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 1968
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ
ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΟΣ ΚΥΚΛΟΣ
Τετάρτη 11 Σεπτεμβρίου 1968

Ζήτημα 1ο

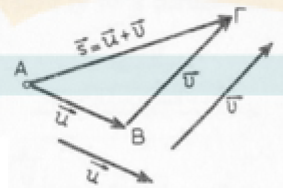
Ἐφαρμοστὸν διάνυσμα.— Καλοῦμεν ἐφαρμοστὸν διάνυσμα ἓν διατεταγμένον ζεῦγος δύο σημείων, Α καὶ Β.

Ἐλεύθερον διάνυσμα.— Ἐλεύθερον διάνυσμα καλεῖται τὸ Σύνολον τῶν ἐφαρμοστῶν διανυσμάτων, ἰσοδυνάμων πρὸς δοθὲν ἐφαρμοστὸν διάνυσμα. Ἓν τοιοῦτον διάνυσμα τὸ συμβολίζομεν εἴτε δι' ἑνὸς γράμματος ($\vec{u}$, π.χ), εἴτε δι' ἑνὸς τυχόντος ἐκ τῶν ἐφαρμοστῶν διανυσμάτων, τὸ ὁποῖον παριστᾷ αὐτὸ (ἀντιπρόσωπος). Π.χ. $\overrightarrow{AB}$:

Πρόσθεσις διανυσμάτων.— Ἔστωσαν $\vec{u}$ καὶ $\vec{\upsilon}$ δύο ἐλεύθερα διανύσματα μὲ ἀντιπροσώπους ἀντιστοίχως τὰ ἐφαρμοστὰ διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ καὶ $\overrightarrow{B\Gamma}$

Καλοῦμεν ἄθροισμα τῶν δύο τούτων διανυσμάτων τὸ διάνυσμα $\vec{s}$, τοῦ ὁποίου ἀντιπρόσωπος εἶναι τὸ ἐφαρμοστὸν διάνυσμα $\overrightarrow{A\Gamma}$. Τὸ συμβολίζομεν δὲ ὡς ἑξῆς :

$$\vec{s} = \vec{u} + \vec{\upsilon}.$$



Ὁ ὁρισμὸς οὗτος γενικεύεται καὶ διὰ πλείονα τῶν δύο διανυσμάτων.

Ἰδιότητες τῆς προσθέσεως.— Αὗται συνοψίζονται εἰς τάς :

α) $\vec{u} + \vec{\upsilon} = \vec{\upsilon} + \vec{u}$ **(ἀντιμεταθετική)**,

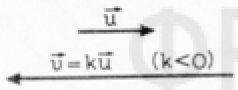
β) $(\vec{u} + \vec{\upsilon}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{\upsilon} + \vec{w})$ **(προσεταιριστική)**,

γ) $\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$ ($\vec{0}$ = **οὐδέτερον στοιχεῖον**),

δ) $\vec{u} + (-\vec{u}) = (-\vec{u}) + \vec{u} = \vec{0}$ ($-\vec{u}$ = ἀντίθετον τοῦ $\vec{u}$).

Γινόμενον διανύσματος $\vec{u}$ ἐπὶ πραγματικὸν ἀριθμὸν k.

ΑΞΙΩΜΑ : Δεχόμεθα ὅτι : « **Δοθέντος πραγματικοῦ ἀριθμοῦ $k \neq 0$ καὶ διανύσματος $\vec{u} \neq \vec{0}$, ὑπάρχει διάνυσμα $\vec{\upsilon}$ ἐπὶ τοῦ φορέως τοῦ $\vec{\upsilon}$, τοιοῦτον ὥστε :**



Σχ. 4

1ον : Τὸ $\vec{\upsilon}$ νὰ ἔχῃ τὴν διεύθυνσιν τοῦ $\vec{u}$.

2ον : Τὸ $\vec{\upsilon}$ νὰ εἶναι τῆς αὐτῆς φορᾶς μὲ τὸ $\vec{u}$, ἐὰν $k > 0$, ἀντιθέτου δὲ φορᾶς μὲ τὸ $\vec{u}$, ὅταν $k < 0$.

3ον : Ὁ λόγος $\frac{|\vec{\upsilon}|}{|\vec{u}|}$, δηλαδὴ τὸ μῆκος τοῦ $\vec{\upsilon}$ πρὸς τὸ μῆκος τοῦ $\vec{u}$ νὰ εἶναι ἴσος πρὸς τὴν ἀπόλυτον τιμὴν τοῦ k· ἤτοι :

$$\frac{|\vec{\upsilon}|}{|\vec{u}|} = |k| \iff |\vec{\upsilon}| = |k| \cdot |\vec{u}|.$$

Παρατηρήσεις : α') Ἐὰν $k = 0$, τότε $\vec{\upsilon} = \vec{0}$, οἱουδήποτε ὄντος τοῦ $\vec{u}$.

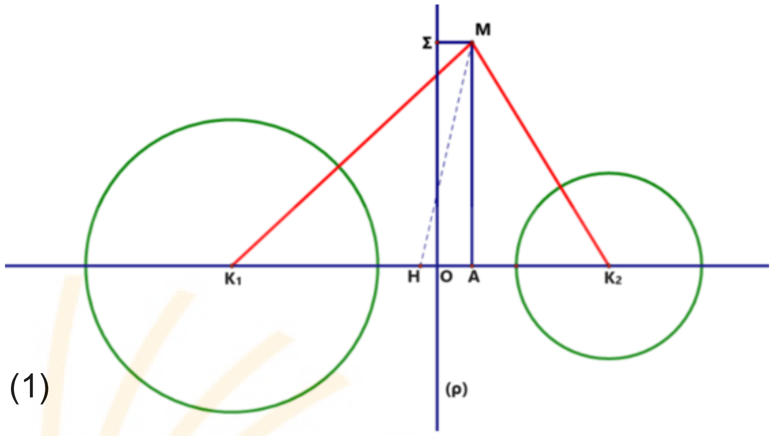
β') Ἐὰν $\vec{u} = \vec{0}$, τότε $\vec{\upsilon} = \vec{0}$, οἱουδήποτε ὄντος τοῦ k.

γ') Ἐὰν $k \cdot \vec{u} = \vec{0}$, τότε ἢ $k = 0$, ἢ $\vec{u} = \vec{0}$ ἢ $k = 0$ καὶ $\vec{u} = \vec{0}$.

δ') Θὰ εἶναι : $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$ καὶ $(-1)\,\vec{u} = -\vec{u}$.

Ζήτημα 2ο

Έστω $R_1 > R_2$ και (ρ) ο ριζικός άξονας των δύο κύκλων.
Φέρουμε $MA \perp K_1K_2$ και $M\Sigma \perp (\rho)$.
Έστω H είναι το μέσο του K_1K_2.



1η περίπτωση

Αν $MK_1 > MK_2$ τότε :

- $\left.\begin{aligned} \Delta_M^{K_1} &= MK_1^2 - R_1^2 \\ \Delta_M^{K_2} &= MK_2^2 - R_2^2 \end{aligned}\right\} \overset{(-)}{\Rightarrow}$

  $\Delta_M^{K_1} - \Delta_M^{K_2} = MK_1^2 - MK_2^2 - \left(R_1^2 - R_2^2\right)$ (1)

- 2ο θεώρημα διαμέσων στο $\overset{\Delta}{MK_1K_2}$: $MK_1^2 - MK_2^2 = 2\cdot K_1K_2\cdot HA$ (2)

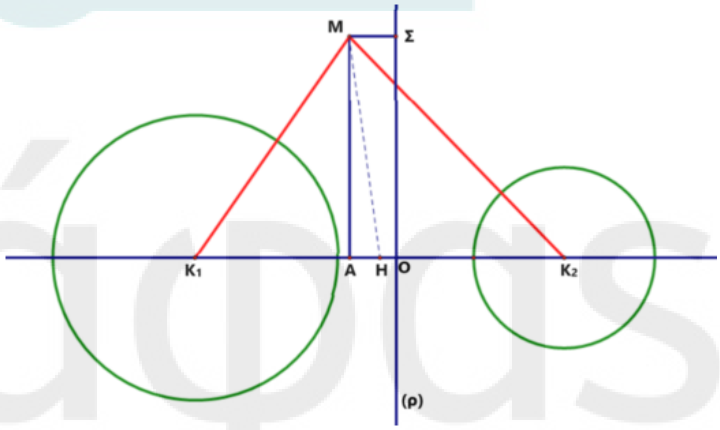
- $OH = \dfrac{R_1^2 - R_2^2}{2\cdot K_1K_2} \Rightarrow R_1^2 - R_2^2 = 2\cdot K_1K_2\cdot OH$ (3)

$(1) \overset{(2)}{\underset{(3)}{\Rightarrow}} \Delta_M^{K_1} - \Delta_M^{K_2} = 2\cdot K_1K_2\cdot HA - 2\cdot K_1K_2\cdot OH \Leftrightarrow$

$\Delta_M^{K_1} - \Delta_M^{K_2} = 2\cdot K_1K_2\cdot (HA - OH) \Leftrightarrow$

$\Delta_M^{K_1} - \Delta_M^{K_2} = 2\cdot K_1K_2\cdot OA \Leftrightarrow$

$\Delta_M^{K_1} - \Delta_M^{K_2} = 2\cdot K_1K_2\cdot M\Sigma$



2η περίπτωση

Αν $MK_1 < MK_2$ τότε :

- $\left.\begin{aligned} \Delta_M^{K_2} &= MK_2^2 - R_2^2 \\ \Delta_M^{K_1} &= MK_1^2 - R_1^2 \end{aligned}\right\} \overset{(-)}{\Rightarrow}$

  $\Delta_M^{K_2} - \Delta_M^{K_1} = MK_2^2 - MK_1^2 + R_1^2 - R_2^2$ (4)

- 2ο θεώρημα διαμέσων στο $\overset{\Delta}{MK_1K_2}$: $MK_1^2 - MK_2^2 = 2\cdot K_1K_2\cdot HA$ (2)

- $OH = \dfrac{R_1^2 - R_2^2}{2\cdot K_1K_2} \Rightarrow R_1^2 - R_2^2 = 2\cdot K_1K_2\cdot OH$ (3)

$(4) \overset{(2)}{\underset{(3)}{\Rightarrow}} \Delta_M^{K_2} - \Delta_M^{K_1} = 2\cdot K_1K_2\cdot HA + 2\cdot K_1K_2\cdot OH \Leftrightarrow$

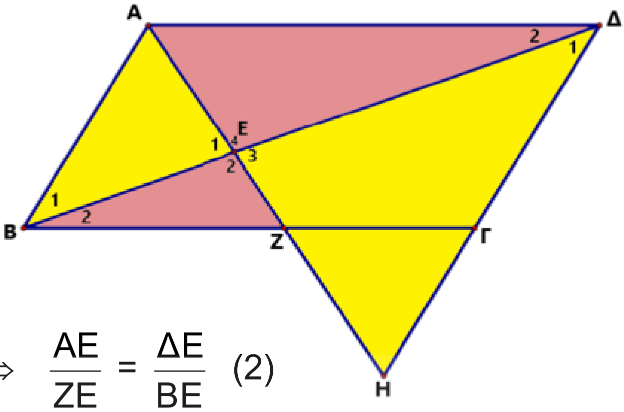
$\Delta_M^{K_2} - \Delta_M^{K_1} = 2\cdot K_1K_2\cdot (HA + OH) \Leftrightarrow$

$\Delta_M^{K_2} - \Delta_M^{K_1} = 2\cdot K_1K_2\cdot OA \Leftrightarrow$

$\Delta_M^{K_2} - \Delta_M^{K_1} = 2\cdot K_1K_2\cdot M\Sigma$

Όμοια αν $R_1 < R_2$.

Ζήτημα 3ο



$$\left.\begin{array}{l}\hat{B}_1 = \hat{\Delta}_1 \text{ (εντός εναλλάξ)} \\ \hat{E}_1 = \hat{E}_3 \text{ (κατακορυφήν)}\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$B\overset{\Delta}{E}A \approx \Delta\overset{\Delta}{E}H \quad \Rightarrow \quad \frac{AE}{HE} = \frac{BE}{\Delta E} \quad (1)$$

$$\left.\begin{array}{l}\hat{\Delta}_2 = \hat{B}_2 \text{ (εντός εναλλάξ)} \\ \hat{E}_4 = \hat{E}_2 \text{ (κατακορυφήν)}\end{array}\right\} \Rightarrow \quad \Delta\overset{\Delta}{E}A \approx B\overset{\Delta}{E}Z \quad \Rightarrow \quad \frac{AE}{ZE} = \frac{\Delta E}{BE} \quad (2)$$

1η λύση

$$(1),(2) \overset{(\cdot)}{\Rightarrow} \frac{AE^2}{HE\cdot ZE} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad AE^2 = HE\cdot ZE \quad \Leftrightarrow \quad AE^2 = (AH - AE)\cdot(AZ - AE) \quad \Leftrightarrow$$

$$AE^2 = AH\cdot AZ - AH\cdot AE - AE\cdot AZ + AE^2 \quad \Leftrightarrow \quad AH\cdot AE + AE\cdot AZ = AH\cdot AZ \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{AH\cdot AE}{AH\cdot AE\cdot AZ} + \frac{AE\cdot AZ}{AH\cdot AE\cdot AZ} = \frac{AH\cdot AZ}{AH\cdot AE\cdot AZ} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{\frac{1}{AZ} + \frac{1}{AH} = \frac{1}{AE}}$$

2η λύση

$$(1) \Rightarrow \frac{AE}{AE + HE} = \frac{BE}{BE + \Delta E} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{AE}{AH} = \frac{BE}{B\Delta} \ (3)$$

$$(2) \Rightarrow \frac{AE}{AE + ZE} = \frac{\Delta E}{BE + \Delta E} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{AE}{AZ} = \frac{\Delta E}{B\Delta} \ (4)$$

$$(3),(4) \overset{(+)}{\Rightarrow} \frac{AE}{AH} + \frac{AE}{AZ} = \frac{BE}{B\Delta} + \frac{\Delta E}{B\Delta} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{AE}{AH} + \frac{AE}{AZ} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{\frac{1}{AH} + \frac{1}{AZ} = \frac{1}{AE}}$$

Από το Β φέρνουμε παράλληλη στην ΜΓ η οποία τέμνει την ΑΜ στο Ζ.
Από το Γ φέρνουμε παράλληλη στην ΜΒ
η οποία τέμνει τις ΑΜ, ΒΖ στα σημεία Ε, Δ αντίστοιχα.
Στο παραλληλόγραμμο ΜΒΔΓ η ΜΑ΄ΕΖ είναι τέμνουσα
άρα σύμφωνα με τα παραπάνω ισχύει :

$$\frac{1}{MZ} + \frac{1}{ME} = \frac{1}{MA'} \overset{\cdot AM}{\Rightarrow} \frac{AM}{MZ} + \frac{AM}{ME} = \frac{AM}{MA'} \quad (5)$$

$$M\Gamma' // BZ \quad \Rightarrow \quad \frac{AM}{MZ} = \frac{A\Gamma'}{\Gamma' B} \ (6)$$

$$MB' // \Gamma E \quad \Rightarrow \quad \frac{AM}{ME} = \frac{AB'}{B'\Gamma} \ (7)$$

$$(5) \underset{(7)}{\overset{(6)}{\Rightarrow}} \mathbf{\frac{A\Gamma'}{\Gamma' B} + \frac{AB'}{B'\Gamma} = \frac{AM}{MA'}}$$