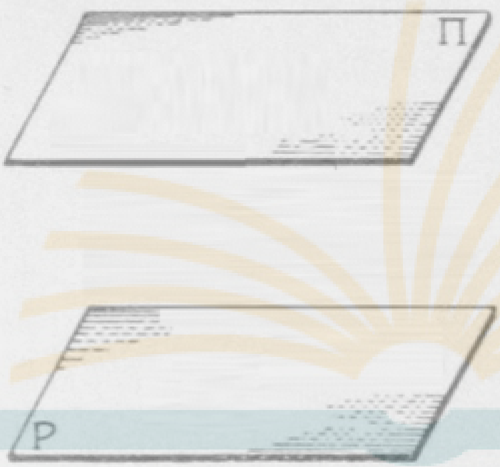
ΓΕΝΙΚΕΣ ΕΙΣΙΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 1968
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΕ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ
ΦΥΣΙΚΟΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ ΚΥΚΛΟΣ
Παρασκευή 13 Σεπτεμβρίου 1968

Ζήτημα 1ο

Δύο επίπεδα είναι παράλληλα ή τέμνονται σε μια ευθεία ή ταυτίζονται.

Δύο ἐπίπεδα λέγονται παράλληλα, ἂν δὲ τέμνωνται ὅσον καὶ ἂν προεκταθῶσιν.



Ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν κοινῶν σημείων δύο ἐπιπέδων λέγεται τομὴ τῶν ἐπιπέδων τούτων.

Διὰ νὰ γνωρίσωμεν τὸ σχῆμα τῆς τομῆς δύο ἐπιπέδων Ε καὶ Ε΄, (σχ. 199) σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς:

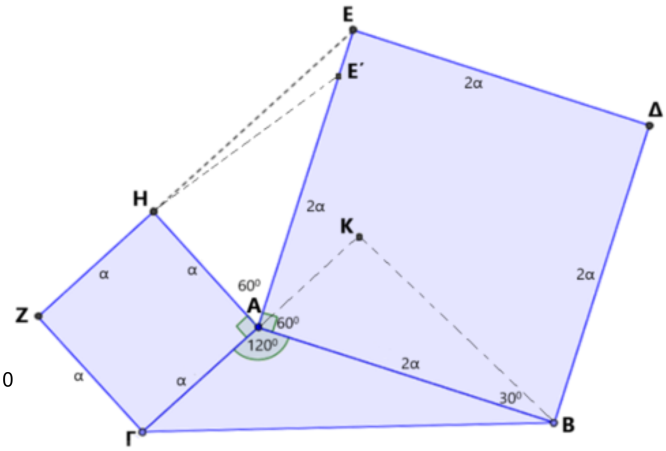
Δύο τυχόντα κοινὰ σημεῖα Α καὶ Β τῶν ἐπιπέδων τούτων ὁρίζουσι τὴν εὐθεῖαν ΑΒ. Γνωρίζομεν δὲ ὅτι αὐτὴ κεῖται καὶ ἐπὶ τῶν δύο τούτων ἐπιπέδων.

Πᾶν δὲ ἄλλο κοινὸν σημεῖον Γ τῶν ἐπιπέδων τούτων κεῖται ἐπὶ τῆς ΑΒ. Διότι, ἂν ἔκειτο ἐκτὸς αὐτῆς, τὰ δύο ἐπίπεδα θὰ ἐταυτίζοντο ὅπερ ἀντίκειται εἰς τὴν ὑπόθεσιν.

Σχ. 199

Ὥστε: Κοινὰ σημεῖα τῶν δύο ἐπιπέδων εἶναι ὅλα τὰ σημεῖα τῆς εὐθείας ΑΒ καὶ μόνον αὐτά. Ἑπομένως:

Ἡ τομὴ δύο ἐπιπέδων εἶναι εὐθεῖα γραμμή.



Ζήτημα 2ο

α) $H\hat{A}E = 360^0 - 90^0 - 120^0 - 90^0 = 60^0$

1ος τρόπος

Προεκτείνουμε την ΖΗ προς το Η και έστω ότι τέμνει την ευθεία ΑΕ στο Ε΄.

Στο $\overset{\Delta}{AHE'}$ είναι $A\hat{H}E' = 90^0$ και $H\hat{A}E = 60^0$

άρα $H\hat{E'}A = 30^0$ και

$AH = \dfrac{AE'}{2} \Rightarrow AE' = 2 \cdot AH = 2\alpha$, δηλαδή $E \equiv E'$.

2ος τρόπος

Νόμος συνημιτόνων στο $\overset{\Delta}{AHE}$: $HE^2 = AH^2 + AE^2 - 2 \cdot AH \cdot AE \cdot \text{συν}60^0 \Rightarrow$

$HE^2 = \alpha^2 + (2\alpha)^2 - 2 \cdot \alpha \cdot 2\alpha \cdot \dfrac{1}{2} = \alpha^2 + 4\alpha^2 - 2\alpha^2 = 3\alpha^2 \Rightarrow HE = \alpha\sqrt{3}$

Στο $\overset{\Delta}{AHE}$ είναι $AE^2 = AH^2 + HE^2 = 4\alpha^2$,

άρα το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με $A\hat{H}E = 90^0$

$Z\hat{H}E = Z\hat{H}A + A\hat{H}E = 90^0 + 90^0 = 180^0$, άρα Ζ, Η, Ε είναι συνευθειακά.

β) Υπολογισμός περιμέτρου πενταγώνου

1ος τρόπος

Φέρνουμε το ύψος ΒΚ του τριγώνου ΑΒΓ.

Στο $\overset{\Delta}{AKB}$ είναι $\hat{K} = 90^0$ και $K\hat{A}B = 60^0$, άρα $K\hat{B}A = 30^0$ και $KA = \dfrac{AB}{2} = \alpha$

Π.Θ. στο $\overset{\Delta}{AKB}$: $BK^2 = AB^2 - AK^2 = (2\alpha)^2 - \alpha^2 = 3\alpha^2 \Rightarrow BK = \alpha\sqrt{3}$

Π.Θ. στο $\overset{\Delta}{BK\Gamma}$: $B\Gamma^2 = \Gamma K^2 + KB^2 = (2\alpha)^2 + (\alpha\sqrt{3})^2 = 7\alpha^2 \Rightarrow B\Gamma = \alpha\sqrt{7}$

2ος τρόπος

Νόμος συνημιτόνων στο $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$: $B\Gamma^2 = A\Gamma^2 + AB^2 - 2 \cdot A\Gamma \cdot AB \cdot \text{συν}120^0 \Rightarrow$

$B\Gamma^2 = \alpha^2 + (2\alpha)^2 - 2 \cdot \alpha \cdot 2\alpha \cdot \left(-\dfrac{1}{2}\right) = \alpha^2 + 4\alpha^2 + 2\alpha^2 = 7\alpha^2 \Rightarrow B\Gamma = \alpha\sqrt{7}$

Περίμετρος $= B\Gamma + \Gamma Z + ZH + HE + E\Delta + \Delta B$

$= \alpha\sqrt{7} + \alpha + \alpha + \alpha\sqrt{3} + 2\alpha + 2\alpha$

$= 6\alpha + \alpha\sqrt{7} + \alpha\sqrt{3}$

$= \mathbf{(6 + \sqrt{7} + \sqrt{3})\alpha}$

Υπολογισμός εμβαδού πενταγώνου

$1^{ος}$ τρόπος

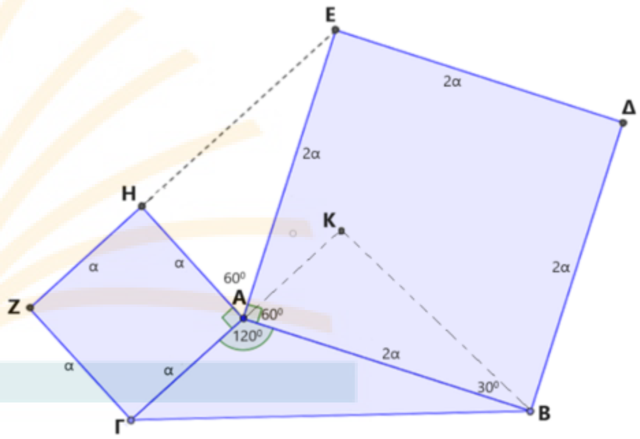
Π.Θ. στο $\overset{\Delta}{AKB}$: $BK^2 = AB^2 - AK^2 = (2\alpha)^2 - \alpha^2 = 3\alpha^2 \Rightarrow BK = \alpha\sqrt{3}$

$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2}\cdot A\Gamma\cdot BK = \frac{1}{2}\cdot\alpha\cdot\alpha\sqrt{3} = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{2}$$

$2^{ος}$ τρόπος

$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2}\cdot A\Gamma\cdot AB\cdot \eta\mu 120^0 = \frac{1}{2}\cdot\alpha\cdot 2\alpha\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{2}$$

$$(AEH) = \frac{1}{2}\cdot AH\cdot EH = \frac{1}{2}\cdot\alpha\cdot\alpha\sqrt{3} = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{2}$$



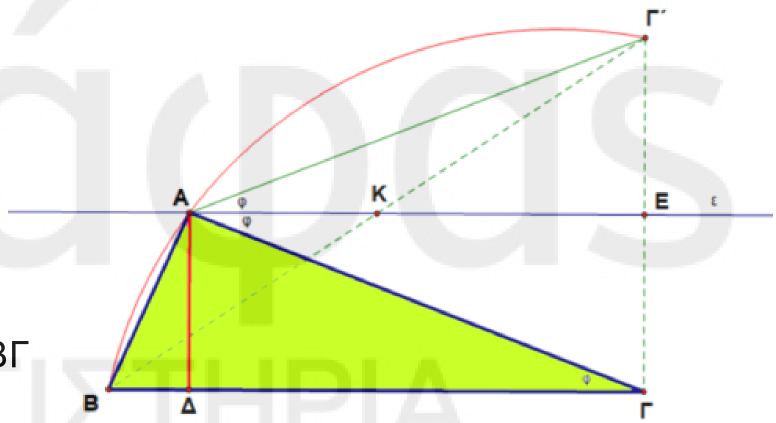
$$\begin{aligned}(B\Delta EZ\Gamma) &= (AB\Gamma) + (AEH) + (AB\Delta E) + (A\Gamma ZH)\\ &= \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{2} + \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{2} + (2\alpha)^2 + \alpha^2\\ &= \alpha^2\sqrt{3} + 4\alpha^2 + \alpha^2\\ &= \alpha^2\sqrt{3} + 5\alpha^2\\ &= \mathbf{(5+\sqrt{3})\alpha^2}\end{aligned}$$

Ζήτημα 3^o

$1^η$ λύση

- $0^0 < \omega < 180^0$

Ανάλυση



Έστω $AB\Gamma$ το ζητούμενο τρίγωνο.

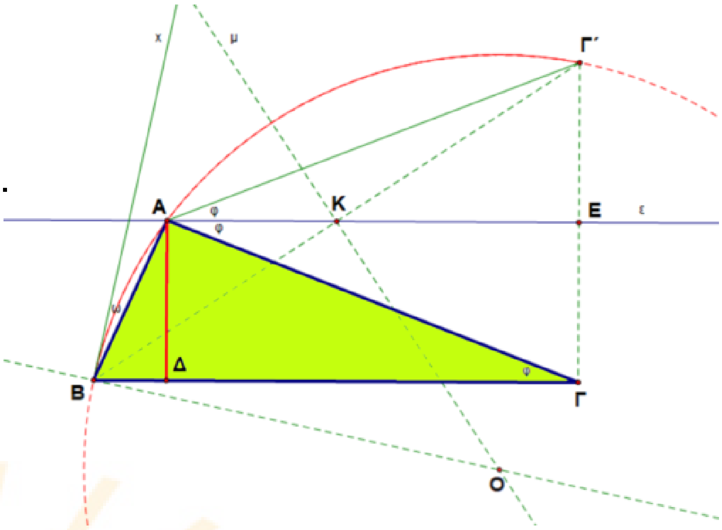
Η κορυφή A βρίσκεται σε ευθεία $\varepsilon // B\Gamma$ σε απόσταση $A\Delta = \upsilon_\alpha$.

Έστω Γ' το συμμετρικό του Γ ως προς την ε.

$$\left.\begin{aligned}&\hat{\Gamma} = \Gamma\hat{A}E \text{ (εντός εναλλάξ)}\\ &\Gamma\hat{A}E = \Gamma'\hat{A}E \text{ (από συμμετρία)}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \hat{\Gamma} = \Gamma\hat{A}E = \Gamma'\hat{A}E$$

$B\hat{A}\Gamma' = \hat{A} + 2\hat{\Gamma} = 180^0 - \hat{B} - \hat{\Gamma} + 2\hat{\Gamma} = 180^0 - (\hat{B} - \hat{\Gamma}) = 180^0 - \omega$ (σταθερή)

Το σημείο A βλέπει το σταθερό τμήμα $B\Gamma'$ υπό σταθερή γωνία $180^0 - \omega$ άρα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι κατασκευάσιμο.



Κατασκευή

Φέρουμε ευθεία ε//ΒΓ σε απόσταση $υ_α$.
Έστω Γ΄ το συμμετρικό του σημείου Γ ως προς την ευθεία ε και Κ το σημείο τομής της ΒΓ΄ με την ευθεία ε.
Φέρουμε τη μεσοκάθετο μ του ΒΓ΄.
Από το Β φέρουμε ημιευθεία Βx, τέτοια ώστε $A\hat{B}x = ω$
Από το Β φέρουμε επίσης κάθετη στη Βx η οποία τέμνει τη μ στο Ο.
Με κέντρο το Ο και ακτίνα ΟΒ γράφουμε τόξο ΒΓ΄, το οποίο τέμνει την ευθεία ε στο σημείο Α.
Το Α είναι το ζητούμενο σημείο.

Απόδειξη

Ισχύουν : ΒΓ = α και ΑΔ = $υ_α$ από την κατασκευή. Θα δείξουμε ότι $ω = \hat{B} - \hat{Γ}$.

$$\left.\begin{array}{l} \hat{Γ} = Γ\hat{A}E \ \text{(εντός εναλλάξ)} \\ Γ\hat{A}E = Γ΄\hat{A}E \ \text{(από συμμετρία)} \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{Γ} = Γ\hat{A}E = Γ΄\hat{A}E$$

Από κατασκευή $B\hat{A}Γ΄ = 180^0 - ω \Leftrightarrow \hat{A} + 2\hat{Γ} = 180^0 - ω \Leftrightarrow$
$\hat{A} + 2\hat{Γ} = \hat{A} + \hat{B} + \hat{Γ} - ω \Leftrightarrow ω = \hat{B} - \hat{Γ}$

Διερεύνηση

- Αν $ω \geq 180^0$ το πρόβλημα δεν έχει λύση.

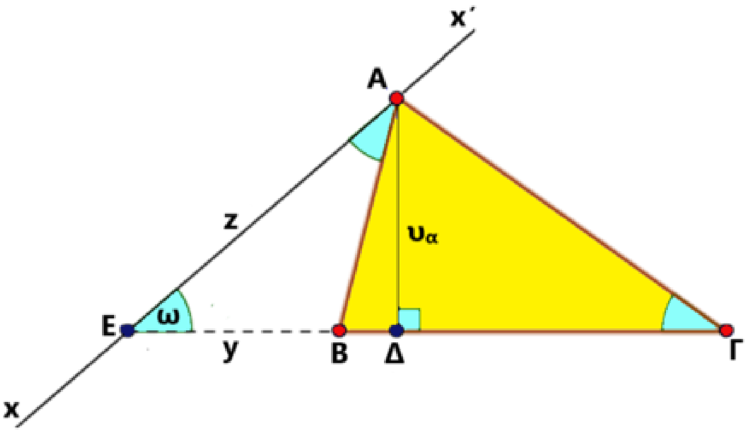
- Αν $ω = 0^0$, τότε $\hat{B} = \hat{Γ}$,
  άρα έχουμε ισοσκελές τρίγωνο με βάση α και ύψος $υ_α$.

- Αν $-180^0 < ω < 0^0$, τότε δουλεύουμε ανάλογα με $\hat{Γ} - \hat{B} = -ω = ω΄$
  και $0^0 < ω΄ < 180^0$.

- Αν $ω \leq -180^0$ το πρόβλημα δεν έχει λύση.

$2^{η}$ λύση

- $0^0 < ω < 180^0$



Ανάλυση

Έστω ΑΒΓ το ζητούμενο τρίγωνο.
Η κορυφή Α βρίσκεται σε ευθεία ε//ΒΓ σε απόσταση $ΑΔ = υ_α$.

Εξωτερικά του $\overset{\Delta}{ΑΒΓ}$ φέρουμε μια ευθεία x΄x, τέτοια ώστε $Β\hat{Α}x = \hat{Γ}$ η οποία τέμνει τον φορέα της ΒΓ στο σημείο Ε.

Στο $\overset{\Delta}{ΑΒΕ}$ η $Α\hat{Β}Γ$ είναι εξωτερική, άρα

$\hat{Β} = \hat{Ε} + Β\hat{Α}x \Rightarrow \hat{Β} = \hat{Ε} + \hat{Γ} \Rightarrow \hat{Ε} = \hat{Β} - \hat{Γ} \Rightarrow \hat{Ε} = ω$.

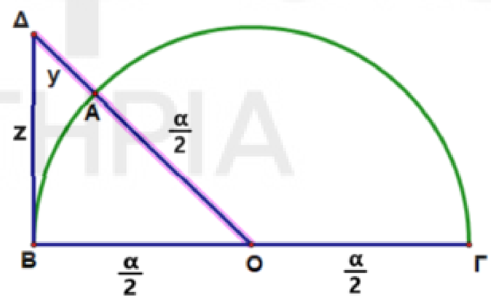
Το ορθογώνιο τρίγωνο $\overset{\Delta}{ΑΔΕ}$ είναι κατασκευάσιμο διότι γνωρίζουμε τις γωνίες του και την κάθετη πλευρά $ΑΔ = υ_α$.
Επομένως το τμήμα ΑΕ = z είναι κατασκευάσιμο.

$$\left.\begin{array}{l} \hat{Γ} = Ε\hat{Α}Β \\ \hat{Ε} \text{ κοινή} \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{ΕΑΓ} \approx \overset{\Delta}{ΕΒΑ} \text{ άρα } \frac{ΑΕ}{ΒΕ} = \frac{ΓΕ}{ΑΕ} \Rightarrow ΑΕ^2 = ΒΕ \cdot ΓΕ \Rightarrow$$

$z^2 = y \cdot (y + α)$ με ΒΕ = y, άρα το τμήμα y είναι κατασκευάσιμο.
Επομένως το τρίγωνο ΑΒΓ είναι κατασκευάσιμο.

Κατασκευή

1. Κατασκευάζουμε το τμήμα z (υποτείνουσα ορθογωνίου τριγώνου με μια γωνία ω και την απέναντι κάθετη πλευρά $υ_α$).
2. Κατασκευάζουμε τμήμα y, τέτοιο ώστε $y \cdot (y + α) = z^2$.
   Γράφουμε ημικύκλιο διαμέτρου ΒΓ.
   Ο είναι το κέντρο του ημικυκλίου.
   Φέρουμε $ΒΔ \perp ΒΓ$, με ΒΔ = z.
   Η ΔΟ τέμνει το ημικύκλιο στο Α.



   Π.Θ. στο $\overset{\Delta}{ΒΟΔ}$: $ΔΟ^2 - ΒΟ^2 = ΔΒ^2 \Leftrightarrow$

   $$\left(ΔΑ + \frac{α}{2}\right)^2 - \left(\frac{α}{2}\right)^2 = z^2 \Leftrightarrow ΔΑ \cdot (ΔΑ + α) = z^2, \text{ άρα } ΔΑ = y.$$
3. Σχεδιάζουμε τμήμα ΒΓ = α και ευθεία ε//ΒΓ σε απόσταση υα.
   Προεκτείνουμε τη ΒΓ προς το Β κατά τμήμα ΒΕ = y.
   Φέρουμε ημιευθεία Εx΄, ώστε ΓΕx = ω, η οποία τέμνει την ε στο Α.
   Το Α είναι το ζητούμενο σημείο.

Απόδειξη

Ισχύουν : $ΒΓ = α$ και $ΑΔ = υ_α$ από την κατασκευή.

Θα δείξουμε ότι $ω = \hat{Β} - \hat{Γ}$.

$$\left.\begin{aligned} &\text{Είναι } y\cdot(y+α) = z^2 \Leftrightarrow \frac{y}{z} = \frac{z}{y+α} \Leftrightarrow \frac{ΒΕ}{ΑΕ} = \frac{ΑΕ}{ΓΕ} \\ &\text{και } Γ\hat{Ε}Α = Β\hat{Ε}Α \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$\overset{\Delta}{ΑΕΒ} \approx \overset{\Delta}{ΓΕΑ}$, άρα $Β\hat{Α}Ε = \hat{Γ}$.

$\hat{Β}$ εξωτερική γωνία στο $\overset{\Delta}{ΑΕΒ}$, άρα $\hat{Β} = \hat{Γ} + ω \Leftrightarrow ω = \hat{Β} - \hat{Γ}$

Διερεύνηση

- Αν $ω \geq 180^0$ το πρόβλημα δεν έχει λύση.

- Αν $ω = 0^0$, τότε $\hat{Β} = \hat{Γ}$,
  άρα έχουμε ισοσκελές τρίγωνο με βάση $α$ και ύψος $υ_α$.

- Αν $-180^0 < ω < 0^0$, τότε δουλεύουμε ανάλογα με $\hat{Γ} - \hat{Β} = -ω = ω΄$
  και $0^0 < ω΄ < 180^0$.

- Αν $ω \leq -180^0$ το πρόβλημα δεν έχει λύση.

- Αν $90^0 < ω < 180^0$, έχουμε το παρακάτω σχήμα