ΓΕΝΙΚΕΣ ΕΙΣΙΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 1967

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΕ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ – ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

ΤΕΧΝΙΚΟΣ ΚΥΚΛΟΣ

Τετάρτη 6 Σεπτεμβρίου 1967

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Ζήτημα 1ο

Αρχικά θα πρέπει $\mathbf{0<\alpha}<\beta<\gamma$.
Για να έχουμε τρίγωνο θα πρέπει να ισχύει η τριγωνική ανισότητα,
δηλαδή $\boldsymbol{\beta-\alpha<\gamma<\alpha+\beta}$ (1).
Από την (1) προκύπτουν $\gamma-\beta<\alpha<\beta+\gamma$ και $\gamma-\alpha<\beta<\alpha+\gamma$.
Επομένως για να υπάρχει τρίγωνο θα πρέπει

$$\boxed{\boldsymbol{\alpha>0 \text{ και } \beta-\alpha<\gamma<\alpha+\beta}}.$$

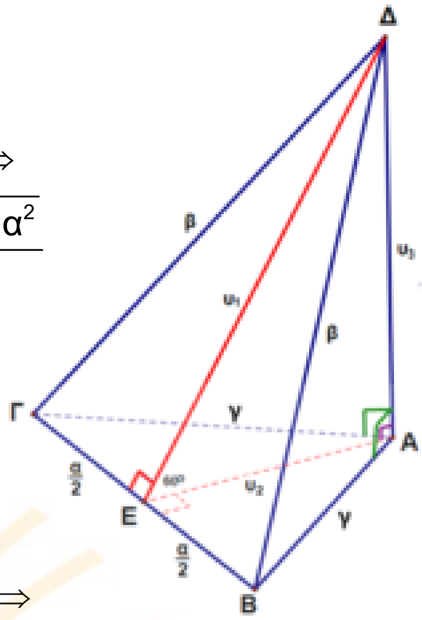
Η μεγαλύτερη γωνία του τριγώνου βρίσκεται
απέναντι από τη μεγαλύτερη πλευρά γ, άρα η γωνία Γ
καθορίζει το είδος του τριγώνου ως προς τις γωνίες του.

- Αν $\Gamma=90^0$, τότε ισχύει το Πυθαγορείο θεώρημα :
  $\gamma^2=\alpha^2+\beta^2$.
- Αν $\Gamma<90^0$, τότε ισχύει η επέκταση του Πυθαγορείου θεωρήματος :
  $\gamma^2=\alpha^2+\beta^2-2\cdot\alpha\cdot\Gamma\Delta$, όπου $\Gamma\Delta$ η προβολή της β πάνω στην α,
  άρα $\gamma^2<\alpha^2+\beta^2$
- Αν $\Gamma<90^0$, τότε ισχύει η επέκταση του Πυθαγορείου θεωρήματος :
  $\gamma^2=\alpha^2+\beta^2+2\cdot\alpha\cdot\Gamma\Delta$, όπου $\Gamma\Delta$ η προβολή της β πάνω στην α,
  άρα $\gamma^2>\alpha^2+\beta^2$

Συνοψίζοντας :

Το τρίγωνο είναι ορθογώνιο αν $\gamma^2=\alpha^2+\beta^2$, οξυγώνιο αν $\gamma^2<\alpha^2+\beta^2$, ενώ είναι αμβλυγώνιο αν $\gamma^2>\alpha^2+\beta^2$.

Ζήτημα 2ο



Πυθαγόρειο Θεώρημα στο $\overset{\Delta}{\Gamma\Delta E}$: $\Delta E^2 = \Gamma\Delta^2 - \Gamma E^2 \Rightarrow$

$$\upsilon_1^2 = \beta^2 - \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \upsilon_1^2 = \frac{4\beta^2 - \alpha^2}{4} \Rightarrow \upsilon_1 = \frac{\sqrt{4\beta^2 - \alpha^2}}{2}$$

Στο ορθογώνιο $\overset{\Delta}{A\Delta E}$ είναι :

$A\hat{E}\Delta = 60^0$, άρα $A\hat{\Delta}E = 30^0$ και

$$AE = \frac{\Delta E}{2} \Rightarrow \upsilon_2 = \frac{\upsilon_1}{2} \Leftrightarrow \upsilon_2 = \frac{\sqrt{4\beta^2 - \alpha^2}}{4}$$

Πυθαγόρειο Θεώρημα στο $\overset{\Delta}{A\Delta E}$: $A\Delta^2 = \Delta E^2 - AE^2 \Rightarrow$

$$\upsilon_3^2 = \upsilon_1^2 - \upsilon_2^2 \Leftrightarrow \upsilon_3^2 = \left(\frac{\sqrt{4\beta^2 - \alpha^2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{4\beta^2 - \alpha^2}}{4}\right)^2 \Rightarrow \upsilon_3 = \frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{4\beta^2 - \alpha^2}}{4}$$

Πυθαγόρειο Θεώρημα στο $\overset{\Delta}{ABE}$: $AB^2 = AE^2 + BE^2 \Rightarrow$

$$\gamma^2 = \upsilon_2^2 + \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \gamma^2 = \left(\frac{\sqrt{4\beta^2 - \alpha^2}}{4}\right)^2 + \frac{\alpha^2}{4} \Rightarrow \gamma = \frac{\sqrt{3\alpha^2 + 4\beta^2}}{4}$$

$$(B\Gamma\Delta) = \frac{1}{2}\cdot B\Gamma\cdot\upsilon_1 = \frac{1}{2}\cdot\alpha\cdot\frac{\sqrt{4\beta^2 - \alpha^2}}{2} = \frac{\alpha\cdot\sqrt{4\beta^2 - \alpha^2}}{4} \quad (1)$$

$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2}\cdot B\Gamma\cdot\upsilon_2 = \frac{1}{2}\cdot\alpha\cdot\frac{\sqrt{4\beta^2 - \alpha^2}}{4} = \frac{\alpha\cdot\sqrt{4\beta^2 - \alpha^2}}{8} \quad (2)$$

$$(AB\Delta) = (A\Gamma\Delta) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3\alpha^2 + 4\beta^2}}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{4\beta^2 - \alpha^2}}{4} = \frac{\sqrt{9\alpha^2 + 12\beta^2}\cdot\sqrt{4\beta^2 - \alpha^2}}{32} \quad (3)$$

$$E = (B\Gamma\Delta) + (AB\Gamma) + (AB\Delta) + (A\Gamma\Delta) \overset{(1),(2)}{\underset{(3)}{\Rightarrow}}$$

$$E = \frac{\alpha\cdot\sqrt{4\beta^2 - \alpha^2}}{4} + \frac{\alpha\cdot\sqrt{4\beta^2 - \alpha^2}}{8} + 2\cdot\frac{\sqrt{9\alpha^2 + 12\beta^2}\cdot\sqrt{4\beta^2 - \alpha^2}}{32} \Rightarrow$$

$$E = \frac{4\alpha\cdot\sqrt{4\beta^2 - \alpha^2}}{16} + \frac{2\alpha\cdot\sqrt{4\beta^2 - \alpha^2}}{16} + \frac{\sqrt{9\alpha^2 + 12\beta^2}\cdot\sqrt{4\beta^2 - \alpha^2}}{16} \Rightarrow$$

$$E = \frac{6\alpha\cdot\sqrt{4\beta^2 - \alpha^2} + \sqrt{9\alpha^2 + 12\beta^2}\cdot\sqrt{4\beta^2 - \alpha^2}}{16} \Rightarrow$$

$$\boxed{\mathbf{E = \frac{1}{16}\cdot\left(6\alpha + \sqrt{9\alpha^2 + 12\beta^2}\right)\cdot\sqrt{4\beta^2 - \alpha^2}}}$$

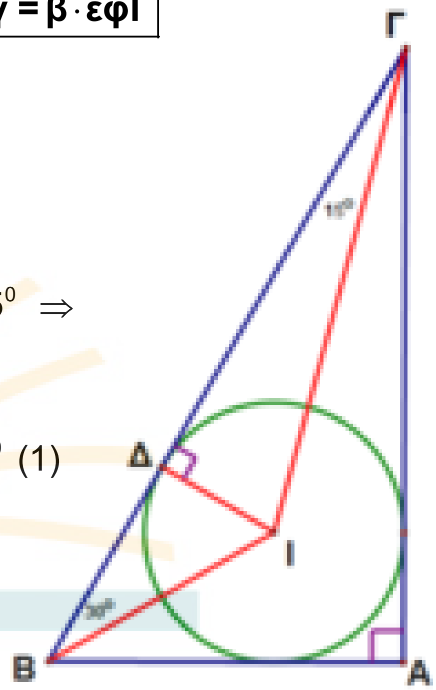
ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

Ζήτημα 1ο

Αν $\hat{A} = 90^0$, ΑΒ = γ, ΒΓ = α και ΑΓ = β, τότε :

$$\boxed{\begin{array}{llll} \boldsymbol{\beta = \alpha \cdot ημB} , & \boldsymbol{\beta = \alpha \cdot συνΓ} , & \boldsymbol{\beta = \gamma \cdot εφB} , & \boldsymbol{\beta = \gamma \cdot σφΓ} \\ \boldsymbol{\gamma = \alpha \cdot συνB} , & \boldsymbol{\gamma = \alpha \cdot ημΓ} , & \boldsymbol{\gamma = \beta \cdot σφB} , & \boldsymbol{\gamma = \beta \cdot εφΓ} \end{array}}$$

Ζήτημα 2ο



1η λύση

$$\left.\begin{array}{l} \overset{\Delta}{ΔΒΙ} : \ σφ30^0 = \dfrac{ΒΔ}{ρ} \\ \overset{\Delta}{ΓΔΙ} : \ σφ15^0 = \dfrac{ΓΔ}{ρ} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{ΒΔ}{ρ} + \frac{ΓΔ}{ρ} = σφ30^0 + σφ15^0 \Rightarrow$$

$$\frac{ΒΔ + ΓΔ}{ρ} = σφ30^0 + σφ15^0 \Rightarrow \frac{α}{ρ} = σφ30^0 + σφ15^0 \ (1)$$

$$ημ^2 15^0 + συν^2 15^0 = 1 \Rightarrow$$

$$ημ^2 15^0 + \left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\right)^2 = 1 \Rightarrow$$

$$ημ^2 15^0 = 1 - \frac{2+\sqrt{3}}{4} \Rightarrow ημ^2 15^0 = \frac{2-\sqrt{3}}{4} \Rightarrow ημ15^0 = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

$$σφ15^0 = \frac{συν15^0}{ημ15^0} = \frac{\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}}{\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}} = \frac{\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^2}{\sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{3}}} = 2 + \sqrt{3}$$

$$(1) \Rightarrow \frac{α}{ρ} = \sqrt{3} + 2 + \sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{α}{ρ} = 2 + 2\sqrt{3} \Leftrightarrow \boldsymbol{\frac{α}{ρ} = 2 \cdot \left(1 + \sqrt{3}\right)}$$

2η λύση (γεωμετρική)

Στο ορθογώνιο είναι $\hat{Γ} = 30^0$, άρα $γ = \dfrac{α}{2}$ και $β = \dfrac{α\sqrt{3}}{2}$

$$τ = \frac{α + β + γ}{2} = \frac{α + \dfrac{α\sqrt{3}}{2} + \dfrac{α}{2}}{2} = \frac{3α + α\sqrt{3}}{4} = \frac{α\sqrt{3} \cdot \left(1 + \sqrt{3}\right)}{4}$$

$$(ΑΒΓ) = \frac{1}{2} \cdot β \cdot γ = τρ \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{\cancel{α\sqrt{3}}}{\cancel{2}} \cdot \frac{α}{\cancel{2}} = \frac{\cancel{α\sqrt{3}} \cdot \left(1 + \sqrt{3}\right) \cdot ρ}{\cancel{4}} \Rightarrow \boldsymbol{\frac{α}{ρ} = 2 \cdot \left(1 + \sqrt{3}\right)}$$