ΓΕΝΙΚΕΣ ΕΙΣΙΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 1968
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΕ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ - ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ
ΤΕΧΝΙΚΟΣ ΚΥΚΛΟΣ
Τρίτη 10 Σεπτεμβρίου 1968

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Ζήτημα 1ο
(Απάντηση από Αριστείδη Πάλλα)

Κάθε πολύγωνον τὸ ὁποῖον ἔχει τὰς πλευρὰς ἴσας καὶ τὰς γωνίας ἴσας καλεῖται κανονικὸν πολύγωνον. Ὡς γνωστὸν ὑπάρχει τύπος ὁ ὁποῖος δίδει τὴν πλευρὰν $\lambda_{2\nu}$ κανονικοῦ πολυγώνου μὲ 2ν πλευρᾶς ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον συναρτήσει τῆς πλευρᾶς λ_ν κανονικοῦ πολυγώνου μὲ ν πλευρᾶς ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον. Ὁ τύπος οὗτος εἶναι ὁ ἑξῆς:

$$\lambda_{2\nu}=\sqrt{2R\left(R-\sqrt{R^2-\frac{\lambda_\nu^2}{4}}\right)}.$$

Ἐπίσης συναρτήσει τοῦ λ_ν δίδεται διὰ τοῦ τύπου:

$$\lambda'_{2\nu}=\frac{2R\lambda_\nu}{2R+\sqrt{4R^2-\lambda_\nu^2}}$$

καὶ ἡ πλευρὰ $\lambda'_{2\nu}$ κανονικοῦ πολυγώνου μὲ 2ν πλευρᾶς περιγεγραμμένου εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον.

Ἔστωσαν Π_ν, $\Pi_{2\nu}$, $\Pi_{4\nu}$, .., $\Pi_{2^k\cdot\nu}$,... αἱ περίμετροι τῶν ἐγγεγραμμένων εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον κανονικῶν πολυγώνων μὲ πλευρὰς ν, 2ν, 4ν,..., $2^k\cdot\nu$,... καὶ Π'_ν, $\Pi'_{2\nu}$, $\Pi'_{4\nu}$,..., $\Pi'_{2^k\cdot\nu}$,... αἱ περίμετροι τῶν ἀντιστοίχων περιγεγραμμένων. Ἀποδεικνύεται ὅτι $\text{ορ}\left(\Pi'_{2^k\cdot\nu}-\Pi_{2^k\cdot\nu}\right)=0$ διὰ $\text{ορ}\,k=\infty$ καὶ συνεπῶς $\text{ορ}\,\Pi'_{2^k\cdot\nu}=\text{ορ}\,\Pi_{2^k\cdot\nu}$ (1).
Ἐὰν Γ καλέσωμεν τὴν περίμετρον τῆς περιφερείας θὰ εἶναι προφανῶς:

$$\Pi_\nu,\ \Pi_{2\nu},\ \Pi_{4\nu},\dots,\ \Pi_{2^k\cdot\nu},\dots<\Gamma \text{ καὶ } \Pi'_\nu,\ \Pi'_{2\nu},\ \Pi'_{4\nu},\dots,\ \Pi'_{2^k\cdot\nu},\dots>\Gamma.$$

Λόγῳ αὐτῶν καὶ τῆς (1) συνάγομεν, ὅτι εἶναι $\text{ορ}\,\Pi'_{2^k\cdot\nu}=\text{ορ}\,\Pi_{2^k\cdot\nu}=\Gamma$.

Ἔστωσαν E_ν, $E_{2\nu}$, $E_{4\nu}$,..., $E_{2^k\cdot\nu}$,... τὰ ἐμβαδὰ τῶν ἐγγεγραμμένων εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον κανονικῶν πολυγώνων μὲ πλευρὰς ν, 2ν, 4ν,..., $2^k\cdot\nu$,... καὶ E'_ν, $E'_{2\nu}$, $E'_{4\nu}$,..., $E'_{2^k\cdot\nu}$,... τὰ ἐμβαδὰ τῶν ἀντιστοίχων περιγεγραμμένων. Ἀποδεικνύεται ὅτι:

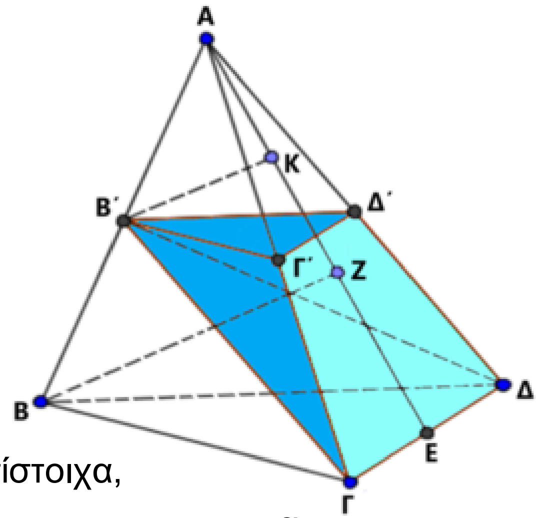
$$\text{ορ}\left(E'_{2^k\cdot\nu}-E_{2^k\cdot\nu}\right)=0, \quad \text{ἤτοι} \quad \text{ορ}\,E'_{2^k\cdot\nu}=\text{ορ}\,E_{2^k\cdot\nu} \quad (2).$$

Ἐὰν Ε καλέσωμεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου θὰ εἶναι προφανῶς:

$$E_\nu,\ E_{2\nu},\ E_{4\nu},\dots,\ E_{2^k\cdot\nu},\dots<E \text{ καὶ } E'_\nu,\ E'_{2\nu},\ E'_{4\nu},\dots,\ E'_{2^k\cdot\nu},\dots>E.$$

Λόγῳ αὐτῶν καὶ τῆς (2) προκύπτει: $\text{ορ}\,E'_{2^k\cdot\nu}=\text{ορ}\,E_{2^k\cdot\nu}=E$.

Ζήτημα 2ο



ΑΒΓΔ κανονικό τετράεδρο πλευράς α.
ΒΖ το ύψος του τετραέδρου.

Ζ το βαρύκεντρο του $\overset{\Delta}{\text{ΑΓΔ}}$.
Βάση της πυραμίδας είναι το ισοσκελές τραπέζιο ΓΔΔ΄Γ΄ και ύψος η Β΄Κ.
Τα Β΄, Γ΄, Δ΄ είναι μέσα των ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ αντίστοιχα,

άρα $AB' = BB' = A\Gamma' = \Gamma\Gamma' = A\Delta' = \Delta\Delta' = B'\Gamma' = \Gamma'\Delta' = B'\Delta' = \frac{\alpha}{2}$

$V = \frac{1}{3}\cdot(\Gamma\Delta\Delta'\Gamma')\cdot B'K \quad (1)$

Αν Ε είναι το μέσο της ΓΔ, τότε $AE = BE = B'\Gamma = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$

Το $\overset{\Delta}{\text{ΑΓΔ}}$ είναι ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς α, άρα $(A\Gamma\Delta) = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}$

Το $\overset{\Delta}{\text{ΑΓ΄Δ΄}}$ είναι ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς $\frac{\alpha}{2}$, άρα $(A\Gamma'\Delta') = \frac{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{16}$

$(\Gamma\Delta\Delta'\Gamma') = (A\Gamma\Delta) - (A\Gamma'\Delta') = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4} - \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{16} = \frac{3\alpha^2\sqrt{3}}{16} \quad (2)$

$EZ = \frac{1}{3}AE = \frac{1}{3}\cdot\frac{\alpha\sqrt{3}}{2} = \frac{\alpha\sqrt{3}}{6}$

Π.Θ. στο ΒΕΖ : $BZ^2 = BE^2 - EZ^2 = \left(\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\alpha\sqrt{3}}{6}\right)^2 = \frac{3\alpha^2}{4} - \frac{3\alpha^2}{36} = \frac{6\alpha^2}{9}$

άρα $BZ = \frac{\alpha\sqrt{6}}{3}$
Στο ΑΒΖ τα Β΄, Κ΄ είναι τα μέσα των ΑΒ και ΑΖ αντίστοιχα,
άρα $B'K' = \frac{BZ}{2} = \frac{\alpha\sqrt{6}}{6} \quad (3)$

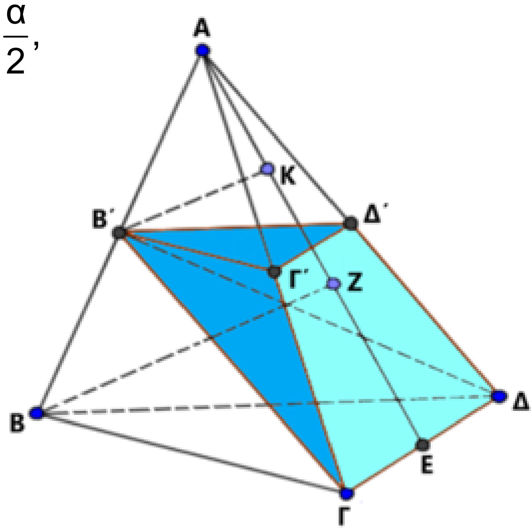
$(1) \underset{(3)}{\overset{(2)}{\Rightarrow}} V = \frac{1}{3}\cdot\frac{3\alpha^2\sqrt{3}}{16}\cdot\frac{\alpha\sqrt{6}}{6} \Rightarrow \boxed{\mathbf{V = \frac{\alpha^3\sqrt{2}}{32}}}$

$E = (\Gamma\Delta\Delta'\Gamma') + (B'\Gamma'\Delta') + (B'\Gamma'\Gamma) + (B'\Delta\Delta') + (B'\Gamma\Delta)$ (4)

Τα $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ και $\overset{\Delta}{AB\Delta}$ είναι ισόπλευρα τρίγωνα πλευράς α,

άρα $(AB\Gamma) = (AB\Delta) = \dfrac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}$

Το $\overset{\Delta}{B'\Gamma'\Delta'}$ είναι ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς $\dfrac{\alpha}{2}$,



άρα $(B'\Gamma'\Delta') = \dfrac{\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{\alpha^2\sqrt{3}}{16}$ (5)

Τα Β΄ , Γ΄ είναι μέσα των ΑΒ, ΑΓ, άρα

$(B'\Gamma\Gamma') = \dfrac{1}{2}(AB'\Gamma) = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot(AB\Gamma) = \dfrac{\alpha^2\sqrt{3}}{16}$ (6)

Τα Β΄ , Δ΄ είναι μέσα των ΑΒ, ΑΔ, άρα

$(B'\Delta\Delta') = \dfrac{1}{2}(AB'\Delta) = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot(AB\Delta) = \dfrac{\alpha^2\sqrt{3}}{16}$ (7)

Π.Θ. στο $\overset{\Delta}{B'E\Gamma}$: $B'E^2 = B'\Gamma^2 - E\Gamma^2 = \left(\dfrac{\alpha\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{\alpha}{2}\right)^2 = \dfrac{3\alpha^2}{4} - \dfrac{\alpha^2}{4} = \dfrac{2\alpha^2}{4}$

άρα $B'E = \dfrac{\alpha\sqrt{2}}{2}$

$(B'\Gamma\Delta) = \dfrac{1}{2}\cdot\Gamma\Delta\cdot B'E = \dfrac{1}{2}\cdot\alpha\cdot\dfrac{\alpha\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\alpha^2\sqrt{2}}{4}$ (8)

$$(4) \underset{(7),(8)}{\overset{(2),(5),(6)}{\Longrightarrow}} E = \frac{3\alpha^2\sqrt{3}}{16} + \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{16} + \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{16} + \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{16} + \frac{\alpha^2\sqrt{2}}{4} \Rightarrow$$

$$E = \frac{6\alpha^2\sqrt{3}}{16} + \frac{\alpha^2\sqrt{2}}{4} \Rightarrow E = \frac{3\alpha^2\sqrt{3}}{8} + \frac{\alpha^2\sqrt{2}}{4} \Rightarrow$$

$$E = \frac{3\alpha^2\sqrt{3}}{8} + \frac{2\alpha^2\sqrt{2}}{8} \Rightarrow E = \frac{3\alpha^2\sqrt{3} + 2\alpha^2\sqrt{2}}{8} \Rightarrow$$

$$\boxed{\mathbf{E = \frac{(3\sqrt{3} + 2\sqrt{2})\alpha^2}{8}}}$$

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

Ζήτημα 1ο

• $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 \Leftrightarrow \dfrac{\eta\mu^2\omega}{\sigma\upsilon\nu^2\omega} + \dfrac{\sigma\upsilon\nu^2\omega}{\sigma\upsilon\nu^2\omega} = \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\omega} \Leftrightarrow$

$$\varepsilon\varphi^2\omega + 1 = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\omega} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2\omega = \frac{1}{1+\varepsilon\varphi^2\omega} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\omega = \pm\sqrt{\frac{1}{1+\varepsilon\varphi^2\omega}}$$

και επειδή $90^0 < \omega < 180^0$ είναι $\sigma\upsilon\nu\omega < 0$, άρα $\boxed{\boldsymbol{\sigma\upsilon\nu\omega = -\dfrac{1}{\sqrt{1+\varepsilon\varphi^2\omega}}}}$

• $\varepsilon\varphi\omega = \dfrac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} \Rightarrow \eta\mu\omega = \varepsilon\varphi\omega\cdot\sigma\upsilon\nu\omega \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{\eta\mu\omega = -\dfrac{\varepsilon\varphi\omega}{\sqrt{1+\varepsilon\varphi^2\omega}}}}$

Ζήτημα 2ο

Είναι : $\eta\mu120^0 = \eta\mu60^0 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\varepsilon\varphi150^0 = -\varepsilon\varphi30^0 = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$\sigma\upsilon\nu150^0 = -\sigma\upsilon\nu30^0 = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\varepsilon\varphi120^0 = -\varepsilon\varphi60^0 = -\sqrt{3}$

$\varepsilon\varphi135^0 = -\varepsilon\varphi45^0 = -1$

$$A = \frac{\frac{1}{2}\cdot\eta\mu120^0 - \frac{\sqrt{2}}{3}\cdot\varepsilon\varphi150^0\cdot\sigma\upsilon\nu150^0}{\frac{\sqrt{2}}{3}\cdot\varepsilon\varphi120^0 + \frac{\sqrt{2}}{5}\cdot\varepsilon\varphi135^0} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{3}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\frac{\sqrt{2}}{3}\cdot\left(-\sqrt{3}\right) + \frac{\sqrt{2}}{5}\cdot(-1)}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{6}}{-\frac{\sqrt{6}}{3} - \frac{\sqrt{2}}{5}} = \frac{\frac{3\sqrt{3} - 2\sqrt{2}}{12}}{-\frac{3\sqrt{2} + 5\sqrt{6}}{15}} = \frac{15(3\sqrt{3} - 2\sqrt{2})}{-12(3\sqrt{2} + 5\sqrt{6})}$$

$$= \frac{5(3\sqrt{3} - 2\sqrt{2})\cdot(3\sqrt{2} - 5\sqrt{6})}{-4(3\sqrt{2} + 5\sqrt{6})\cdot(3\sqrt{2} - 5\sqrt{6})} = \frac{5\cdot(9\sqrt{6} - 45\sqrt{2} - 12 + 20\sqrt{3})}{-4\cdot(18 - 150)}$$

$$= \frac{5\cdot(9\sqrt{6} - 45\sqrt{2} + 20\sqrt{3} - 12)}{-4\cdot(-132)} = \boxed{\frac{5\cdot(9\sqrt{6} - 45\sqrt{2} + 20\sqrt{3} - 12)}{528}}$$