ΓΕΝΙΚΕΣ ΕΙΣΙΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 1967
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ
ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΟΣ ΚΥΚΛΟΣ – ΦΥΣΙΚΟΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ ΚΥΚΛΟΣ – ΓΕΩΠΟΝΟΔΑΣΟΛΟΓΙΚΟΣ ΚΥΚΛΟΣ

Τετάρτη 13 Σεπτεμβρίου 1967

Ζήτημα 1ο

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A \;\Rightarrow\; \sigma\upsilon\nu A = \frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2\beta\gamma} \quad (1)$$

• $\sigma\upsilon\nu A = 1 - 2\eta\mu^2\frac{A}{2} \;\Leftrightarrow\; 2\eta\mu^2\frac{A}{2} = 1 - \sigma\upsilon\nu A \;\Leftrightarrow\; \eta\mu^2\frac{A}{2} = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu A}{2} \overset{0<\frac{A}{2}<90^0}{\Rightarrow}$

$$\eta\mu\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1 - \sigma\upsilon\nu A}{2}} \overset{(1)}{=} \sqrt{\frac{1 - \frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2\beta\gamma}}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{\alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 + 2\beta\gamma}{2\beta\gamma}}{2}} = \sqrt{\frac{\alpha^2 - (\beta - \gamma)^2}{4\beta\gamma}}$$

$$= \sqrt{\frac{(\alpha - \beta + \gamma)(\alpha + \beta - \gamma)}{4\beta\gamma}} = \sqrt{\frac{(2\tau - 2\beta)(2\tau - 2\gamma)}{4\beta\gamma}} = \sqrt{\frac{2(\tau - \beta)2(\tau - \gamma)}{4\beta\gamma}} = \boldsymbol{\sqrt{\frac{(\tau - \beta)(\tau - \gamma)}{\beta\gamma}}}$$

• $\sigma\upsilon\nu A = 2\sigma\upsilon\nu^2\frac{A}{2} - 1 \;\Leftrightarrow\; 2\sigma\upsilon\nu^2\frac{A}{2} = 1 + \sigma\upsilon\nu A \;\Leftrightarrow\; \sigma\upsilon\nu^2\frac{A}{2} = \frac{1 + \sigma\upsilon\nu A}{2} \overset{0<\frac{A}{2}<90^0}{\Rightarrow}$

$$\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1 + \sigma\upsilon\nu A}{2}} \overset{(1)}{=} \sqrt{\frac{1 + \frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2\beta\gamma}}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{\beta^2 + \gamma^2 + 2\beta\gamma - \alpha^2}{2\beta\gamma}}{2}} = \sqrt{\frac{(\beta + \gamma)^2 - \alpha^2}{4\beta\gamma}}$$

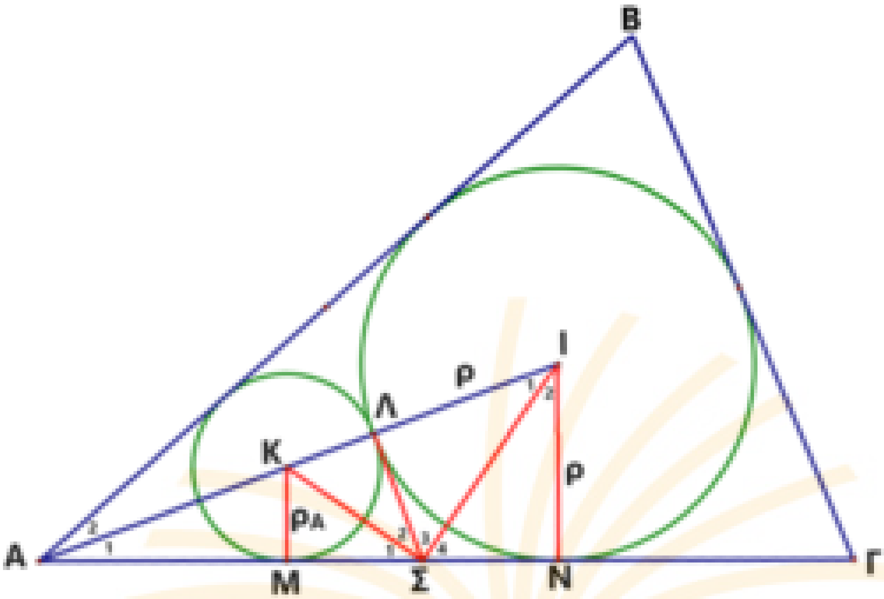
$$= \sqrt{\frac{(\beta + \gamma - \alpha)(\beta + \gamma + \alpha)}{4\beta\gamma}} = \sqrt{\frac{(2\tau - 2\alpha)\cdot 2\tau}{4\beta\gamma}} = \sqrt{\frac{2(\tau - \alpha)\cdot 2\tau}{4\beta\gamma}} = \boldsymbol{\sqrt{\frac{\tau\cdot(\tau - \alpha)}{\beta\gamma}}}$$

• $$\varepsilon\varphi\frac{A}{2} = \frac{\eta\mu\frac{A}{2}}{\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}} = \frac{\sqrt{\frac{(\tau - \beta)(\tau - \gamma)}{\beta\gamma}}}{\sqrt{\frac{\tau\cdot(\tau - \alpha)}{\beta\gamma}}} = \sqrt{\frac{\frac{(\tau - \beta)(\tau - \gamma)}{\beta\gamma}}{\frac{\tau\cdot(\tau - \alpha)}{\beta\gamma}}} = \boldsymbol{\sqrt{\frac{(\tau - \beta)(\tau - \gamma)}{\tau\cdot(\tau - \alpha)}}}$$

• $$\sigma\varphi\frac{A}{2} = \frac{1}{\varepsilon\varphi\frac{A}{2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{(\tau - \beta)(\tau - \gamma)}{\tau\cdot(\tau - \alpha)}}} = \boldsymbol{\sqrt{\frac{\tau\cdot(\tau - \alpha)}{(\tau - \beta)(\tau - \gamma)}}}$$

Με κυκλική εναλλαγή γραμμάτων βρίσκουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών $\frac{B}{2}$ και $\frac{\Gamma}{2}$.

Ζήτημα 2ο



$$\hat{\Sigma}_1 = \hat{\Sigma}_2 = \frac{\hat{\Sigma}_{1,2}}{2} = \frac{\frac{\pi}{2} - \hat{A}_1}{2} = \frac{\frac{\pi}{2} - \frac{\hat{A}}{2}}{2} = \frac{\frac{\pi - \hat{A}}{2}}{2} = \frac{\pi - \hat{A}}{4}$$

$\hat{I}_1 = \hat{\Sigma}_1$ (οξείες γωνίες με πλευρές κάθετες), άρα $\hat{I}_1 = \hat{\Sigma}_1 = \frac{\pi - \hat{A}}{4}$

$$\overset{\Delta}{MK\Sigma} : \varepsilon\varphi\hat{\Sigma}_1 = \frac{KM}{M\Sigma} \Rightarrow \varepsilon\varphi\frac{\pi - \hat{A}}{4} = \frac{\rho_A}{\Lambda\Sigma} \quad (1)$$

$$\overset{\Delta}{I\Lambda\Sigma} : \varepsilon\varphi\hat{I}_1 = \frac{\Lambda\Sigma}{I\Lambda} \Rightarrow \varepsilon\varphi\frac{\pi - \hat{A}}{4} = \frac{\Lambda\Sigma}{\rho} \quad (2)$$

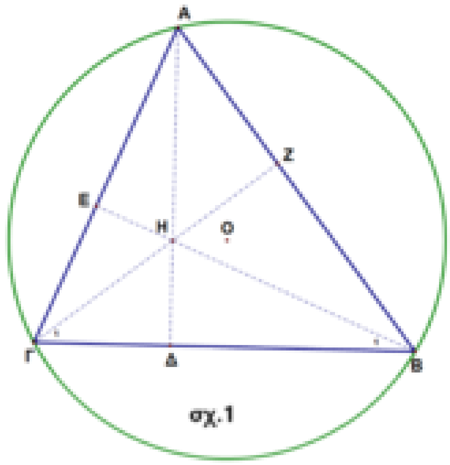
$$(1), (2) \overset{(\bullet)}{\Rightarrow} \varepsilon\varphi^2\frac{\pi - \hat{A}}{4} = \frac{\rho_A}{\Lambda\Sigma}\cdot\frac{\Lambda\Sigma}{\rho} \Leftrightarrow \boldsymbol{\varepsilon\varphi^2\frac{\pi - \hat{A}}{4} = \frac{\rho_A}{\rho}}$$

Όμοια αποδεικνύουμε :

$\boldsymbol{\varepsilon\varphi^2\frac{\pi - \hat{B}}{4} = \frac{\rho_B}{\rho}}$ και $\boldsymbol{\varepsilon\varphi^2\frac{\pi - \hat{\Gamma}}{4} = \frac{\rho_\Gamma}{\rho}}$.

Ζήτημα 3ο

• Αν ΑΒΓ είναι οξυγώνιο (σχ.1)



σχ.1

$\overset{\Delta}{BH\Delta}: (BH) = \dfrac{B\Delta}{\sigma\upsilon\nu B_1}$, $\overset{\Delta}{BA\Delta}: B\Delta = AB\cdot\sigma\upsilon\nu B$ $\Rightarrow (BH) = \dfrac{AB\cdot\sigma\upsilon\nu B}{\sigma\upsilon\nu B_1} \overset{\hat{B}_1+\hat{\Gamma}=90^0}{\Rightarrow}$

$(BH) = \dfrac{AB\cdot\sigma\upsilon\nu B}{\eta\mu\Gamma} \overset{AB=2R\eta\mu\Gamma}{\Rightarrow} (BH) = \dfrac{2R\cdot\eta\mu\Gamma\cdot\sigma\upsilon\nu B}{\eta\mu\Gamma} \Rightarrow$

$(BH) = 2R\cdot\sigma\upsilon\nu B \quad (1)$

$\overset{\Delta}{\Gamma H\Delta}: (\Gamma H) = \dfrac{\Gamma\Delta}{\sigma\upsilon\nu\Gamma_1}$, $\overset{\Delta}{\Gamma A\Delta}: \Gamma\Delta = A\Gamma\cdot\sigma\upsilon\nu\Gamma$ $\Rightarrow (\Gamma H) = \dfrac{A\Gamma\cdot\sigma\upsilon\nu\Gamma}{\sigma\upsilon\nu\Gamma_1} \overset{\hat{\Gamma}_1+\hat{B}=90^0}{\Rightarrow} (\Gamma H) = \dfrac{A\Gamma\cdot\sigma\upsilon\nu\Gamma}{\eta\mu B} \overset{A\Gamma=2R\eta\mu B}{\Rightarrow}$

$(\Gamma H) = \dfrac{2R\cdot\eta\mu B\cdot\sigma\upsilon\nu\Gamma}{\eta\mu B} \Rightarrow (\Gamma H) = 2R\cdot\sigma\upsilon\nu\Gamma \quad (2)$

$\dfrac{(BH)\cdot(\Gamma H)}{R^2} \le 4\eta\mu^2\dfrac{A}{2} \overset{(1)}{\underset{(2)}{\Leftrightarrow}} \dfrac{2R\cdot\sigma\upsilon\nu B\cdot 2R\cdot\sigma\upsilon\nu\Gamma}{R^2} \le 4\cdot\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu A}{2} \Leftrightarrow$

$2\sigma\upsilon\nu B\cdot\sigma\upsilon\nu\Gamma \le 1-\sigma\upsilon\nu A \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu(B+\Gamma)+\sigma\upsilon\nu(B-\Gamma) \le 1-\sigma\upsilon\nu A \Leftrightarrow$

$\sigma\upsilon\nu(180^0 - A)+\sigma\upsilon\nu(B-\Gamma) \le 1-\sigma\upsilon\nu A \Leftrightarrow -\sigma\upsilon\nu A+\sigma\upsilon\nu(B-\Gamma) \le 1-\sigma\upsilon\nu A \Leftrightarrow$

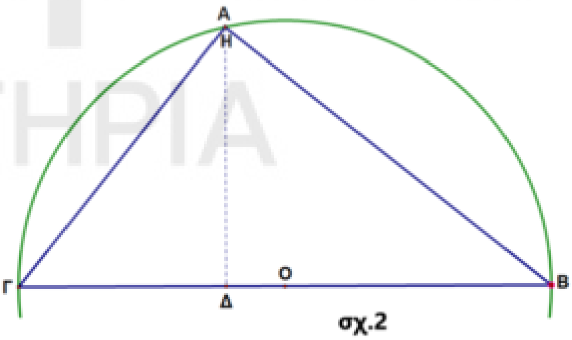
$\sigma\upsilon\nu(B-\Gamma)\le 1$ που ισχύει.

Το "=" ισχύει όταν $\sigma\upsilon\nu(B-\Gamma)=1 \overset{-90^0<B-\Gamma<90^0}{\Leftrightarrow} B-\Gamma=0 \Leftrightarrow B=\Gamma$

δηλαδή όταν το τρίγωνο είναι ισοσκελές στο Α.

• Αν ΑΒΓ είναι ορθογώνιο στο Α (σχ.2)

Είναι $H\equiv A$, $BH=\gamma$, $\Gamma H=\beta$ και $\alpha=2R$.



σχ.2

$\dfrac{(BH)\cdot(\Gamma H)}{R^2} \le 4\eta\mu^2\dfrac{A}{2} \Rightarrow \dfrac{\gamma\cdot\beta}{R^2} \le 4\eta\mu^2 45^0 \Leftrightarrow$

$\beta\gamma \le 4R^2\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \beta\gamma \le \alpha^2\cdot\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 2\beta\gamma \le \alpha^2 \Leftrightarrow$

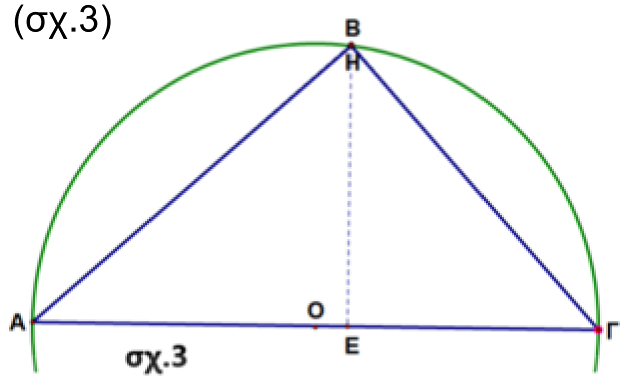
$2\beta\gamma \le \beta^2+\gamma^2 \Leftrightarrow 0 \le \beta^2 - 2\beta\gamma+\gamma^2 \Leftrightarrow 0 \le (\beta-\gamma)^2$ που ισχύει

Το "=" ισχύει όταν $(\beta-\gamma)^2=0 \Leftrightarrow \beta-\gamma=0 \Leftrightarrow \beta=\gamma$

δηλαδή όταν το τρίγωνο είναι ορθογώνιο και ισοσκελές στο Α.

• Αν ΑΒΓ είναι ορθογώνιο στο Β ή στο Γ (σχ.3)

Είναι $H \equiv B$ και $BH = 0$.

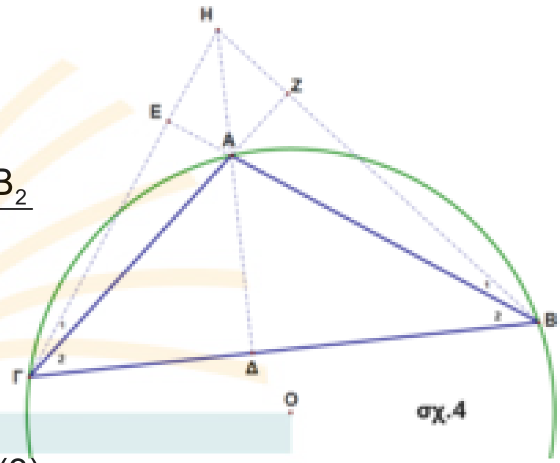


$$\frac{(BH)\cdot(\Gamma H)}{R^2} \leq 4\eta\mu^2\frac{A}{2} \;\Rightarrow\; 0 \leq 4\eta\mu^2\frac{A}{2}$$

που ισχύει αφού $0^0 < A < 45^0$

Το "=" δεν ισχύει διότι $4\eta\mu^2\frac{A}{2} > 0$.

• Αν ΑΒΓ είναι αμβλυγώνιο στο Α (σχ.4)



$$\left.\begin{array}{l} \overset{\Delta}{BH\Delta} : (BH) = \dfrac{B\Delta}{\sigma\upsilon\nu B_{1,2}} \\ \overset{\Delta}{BA\Delta} : B\Delta = AB\cdot\sigma\upsilon\nu B_2 \end{array}\right\} \Rightarrow (BH) = \frac{AB\cdot\sigma\upsilon\nu B_2}{\sigma\upsilon\nu B_{1,2}}$$

$$\overset{\hat{B}_{1,2}+\hat{\Gamma}_2=90^0}{\Rightarrow} (BH) = \frac{AB\cdot\sigma\upsilon\nu B_2}{\eta\mu\Gamma_2} \overset{AB=2R\eta\mu\Gamma_2}{\Rightarrow}$$

$$(BH) = \frac{2R\cdot\eta\mu\Gamma_2\cdot\sigma\upsilon\nu B_2}{\eta\mu\Gamma_2} \Rightarrow (BH) = 2R\cdot\sigma\upsilon\nu B_2 \quad (3)$$

$$\left.\begin{array}{l} \overset{\Delta}{\Gamma H\Delta} : (\Gamma H) = \dfrac{\Gamma\Delta}{\sigma\upsilon\nu\Gamma_{1,2}} \\ \overset{\Delta}{\Gamma A\Delta} : \Gamma\Delta = A\Gamma\cdot\sigma\upsilon\nu\Gamma_2 \end{array}\right\} \Rightarrow (\Gamma H) = \frac{A\Gamma\cdot\sigma\upsilon\nu\Gamma_2}{\sigma\upsilon\nu\Gamma_{1,2}} \overset{\hat{\Gamma}_{1,2}+\hat{B}_2=90^0}{\Rightarrow}$$

$$(\Gamma H) = \frac{A\Gamma\cdot\sigma\upsilon\nu\Gamma_2}{\eta\mu B_2} \overset{A\Gamma=2R\eta\mu B_2}{\Rightarrow} (\Gamma H) = \frac{2R\cdot\eta\mu B_2\cdot\sigma\upsilon\nu\Gamma_2}{\eta\mu B_2} \Rightarrow (\Gamma H) = 2R\cdot\sigma\upsilon\nu\Gamma_2 \quad (4)$$

$$\frac{(BH)\cdot(\Gamma H)}{R^2} \leq 4\eta\mu^2\frac{A}{2} \underset{(4)}{\overset{(3)}{\Leftrightarrow}} \frac{2R\cdot\sigma\upsilon\nu B_2\cdot 2R\cdot\sigma\upsilon\nu\Gamma_2}{R^2} \leq 4\cdot\frac{1-\sigma\upsilon\nu A}{2} \Leftrightarrow$$

$$2\sigma\upsilon\nu B_2\cdot\sigma\upsilon\nu\Gamma_2 \leq 1-\sigma\upsilon\nu A \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu(B_2+\Gamma_2)+\sigma\upsilon\nu(B_2-\Gamma_2) \leq 1-\sigma\upsilon\nu A \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu(180^0 - A)+\sigma\upsilon\nu(B_2-\Gamma_2) \leq 1-\sigma\upsilon\nu A \Leftrightarrow$$

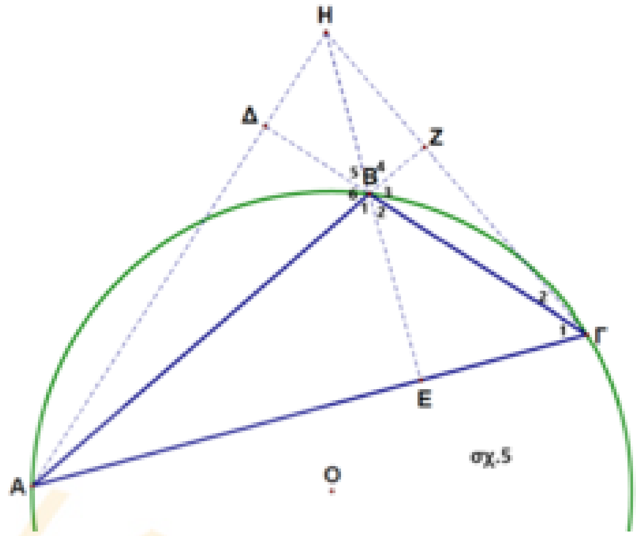
$$-\sigma\upsilon\nu A+\sigma\upsilon\nu(B_2-\Gamma_2) \leq 1-\sigma\upsilon\nu A \Leftrightarrow$$

$\sigma\upsilon\nu(B_2-\Gamma_2) \leq 1$ που ισχύει.

Το "=" ισχύει όταν $\sigma\upsilon\nu(B_2-\Gamma_2) = 1 \overset{-90^0<B_2-\Gamma_2<90^0}{\Leftrightarrow} B_2-\Gamma_2 = 0 \Leftrightarrow B_2 = \Gamma_2$

δηλαδή όταν το τρίγωνο είναι ισοσκελές στο Α.

• Αν ΑΒΓ είναι αμβλυγώνιο στο Β (σχ.5)



$$\left.\begin{aligned} \overset{\Delta}{BHZ} &: (BH) = \frac{BZ}{\sigma\upsilon\nu B_4} \\ \overset{\Delta}{B\Gamma Z} &: BZ = B\Gamma \cdot \sigma\upsilon\nu B_3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$(BH) = \frac{B\Gamma \cdot \sigma\upsilon\nu B_3}{\sigma\upsilon\nu B_4} \overset{\hat{B}_3 = 180^0 - \hat{B}_{1,2}}{\underset{\hat{B}_4 = \hat{B}_1}{\Rightarrow}}$$

$$(BH) = \frac{B\Gamma \cdot \sigma\upsilon\nu(180^0 - B_{1,2})}{\sigma\upsilon\nu B_1} \overset{B\Gamma = 2R\eta\mu A}{\Rightarrow}$$

$$(BH) = \frac{2R \cdot \eta\mu A \cdot (-\sigma\upsilon\nu B_{1,2})}{\eta\mu A} \Rightarrow (BH) = -2R \cdot \sigma\upsilon\nu B_{1,2} \quad (5)$$

$$\left.\begin{aligned} \overset{\Delta}{\Gamma HE} &: (\Gamma H) = \frac{\Gamma E}{\sigma\upsilon\nu \Gamma_{1,2}} \\ \overset{\Delta}{B\Gamma E} &: \Gamma E = B\Gamma \cdot \sigma\upsilon\nu \Gamma_1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow (\Gamma H) = \frac{B\Gamma \cdot \sigma\upsilon\nu \Gamma_1}{\sigma\upsilon\nu \Gamma_{1,2}} \overset{\hat{\Gamma}_{1,2} + \hat{A} = 90^0}{\Rightarrow}$$

$$(\Gamma H) = \frac{B\Gamma \cdot \sigma\upsilon\nu \Gamma_1}{\eta\mu A} \overset{B\Gamma = 2R\eta\mu A}{\Rightarrow} (\Gamma H) = \frac{2R \cdot \eta\mu A \cdot \sigma\upsilon\nu \Gamma_1}{\eta\mu A} \Rightarrow (\Gamma H) = 2R \cdot \sigma\upsilon\nu \Gamma_1 \quad (6)$$

$$\frac{(BH)\cdot(\Gamma H)}{R^2} \le 4\eta\mu^2 \frac{A}{2} \overset{(5)}{\underset{(6)}{\Leftrightarrow}} \frac{-2R \cdot \sigma\upsilon\nu B_{1,2} \cdot 2R \cdot \sigma\upsilon\nu \Gamma_1}{R^2} \le 4 \cdot \frac{1 - \sigma\upsilon\nu A}{2} \Leftrightarrow$$

$$-2\sigma\upsilon\nu B_{1,2} \cdot \sigma\upsilon\nu \Gamma_1 \le 1 - \sigma\upsilon\nu A \Leftrightarrow$$

$$-\sigma\upsilon\nu(B_{1,2} + \Gamma_1) - \sigma\upsilon\nu(B_{1,2} - \Gamma_1) \le 1 - \sigma\upsilon\nu A \Leftrightarrow$$

$$-\sigma\upsilon\nu(180^0 - A) - \sigma\upsilon\nu(B_{1,2} - \Gamma_1) \le 1 - \sigma\upsilon\nu A \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu A - \sigma\upsilon\nu(B_{1,2} - \Gamma_1) \le 1 - \sigma\upsilon\nu A \Leftrightarrow$$

$2\sigma\upsilon\nu A - \sigma\upsilon\nu(B_{1,2} - \Gamma_1) \le 1$ η οποία δεν ισχύει πάντα

Επομένως η ζητούμενη σχέση $\frac{(BH)\cdot(\Gamma H)}{R^2} \le 4\eta\mu^2 \frac{A}{2}$ για $B > 90^0$ άλλοτε δεν ισχύει (σχ.6) και άλλοτε ισχύει (σχ.7). Όμοια για $\Gamma > 90^0$.