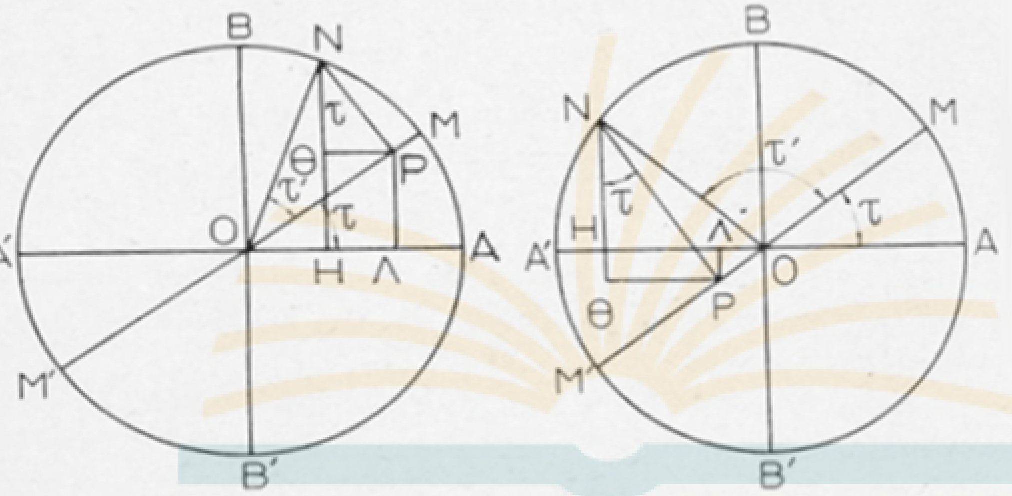
ΓΕΝΙΚΕΣ ΕΙΣΙΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 1968
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ
ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΟΣ ΚΥΚΛΟΣ
Δευτέρα 9 Σεπτεμβρίου 1968

Ζήτημα 1ο

Ἔστω α τὸ μέτρον ἑνὸς τυχόντος ἐκ τῶν τόξων ΑΜ καὶ β τὸ μέτρον ἑνὸς ἐκ τῶν τόξων ΜΝ (σχ. 46). Ἄθροισμα τούτων εἶναι ἐκεῖνο ἐκ τῶν τόξων ΑΝ, τὸ ὁποῖον ἔχει μέτρον $\alpha + \beta$.



(α′) (β′)

Σχ. 46

Θέλομεν λοιπὸν νὰ εὕρωμεν τὸ $\text{ἡμ}(\alpha+\beta)$ καὶ τὸ $\text{συν}(\alpha+\beta)$ ἂν γνωρίζωμεν τὸ ἡμα, συνα, ἡμβ, συνβ.

Λύσις. Θεωροῦμεν ὡς ἄξονα τῶν συνημιτόνων τὸν Α′Α διὰ τὰ τόξα ΑΜ καὶ ΑΝ καὶ τὸν Μ′Μ διὰ τὰ τόξα ΜΝ. Φέρομεν ἔπειτα τὴν ΝΡ κάθετον ἐπὶ τὸν ἄξονα Μ′Μ, τὰς ΝΗ, ΡΛ καθέτους ἐπὶ τὸν ἄξονα Α′Α καὶ τὴν ΡΘ παράλληλον πρὸς αὐτόν.

Ἂν δὲ τ εἶναι τὸ μέτρον τῆς ἐλαχίστης θετικῆς γωνίας $\widehat{OA,OM}$ καὶ τ′ τὸ μέτρον τῆς ἐλαχίστης θετικῆς γωνίας $\widehat{OM,ON}$, θὰ εἶναι :

$$\text{ἡμ}\tau = \text{ἡμ}\alpha, \qquad \text{συν}\tau = \text{συν}\alpha$$

$$\text{ἡμ}\beta = \text{ἡμ}\tau' = (\overline{PN}), \quad \text{συν}\beta = \text{συν}\tau' = (\overline{OP}).$$

Γνωρίζομεν δὲ ἀφ' ἑτέρου ὅτι :

$$\left.\begin{aligned} \text{ἡμ}(\alpha+\beta) &= (\overline{HN}) = (\overline{H\Theta}) + (\overline{\Theta N}) = (\overline{\Lambda P}) + (\overline{\Theta N}) \\ \text{συν}(\alpha+\beta) &= (\overline{OH}) = (\overline{O\Lambda}) + (\overline{\Lambda H}) = (\overline{O\Lambda}) - (\overline{\Theta P}) \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Ἐπειδὴ δὲ $\widehat{PN\Theta} = \widehat{AOM} = \tau$, ἐκ τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων ΟΡΛ, ΝΡΘ εὑρίσκομεν ὅτι :

$$(\overline{\Lambda P}) = (\overline{OP})\text{ἡμ}\tau = \text{ἡμ}\alpha\text{συν}\beta, \quad (\overline{O\Lambda}) = (\overline{OP})\text{συν}\tau = \text{συν}\alpha\text{συν}\beta.$$

$$(\overline{\Theta P}) = (\overline{PN})\text{ἡμ}\tau = \text{ἡμ}\alpha\text{ἡμ}\beta, \quad (\overline{\Theta N}) = (\overline{PN})\text{συν}\tau = \text{ἡμ}\beta\text{συν}\alpha.$$

Ἕνεκα τούτων αἱ ἰσότητες (1) γίνονται :

$$\left.\begin{aligned} \text{ἡμ}(\alpha+\beta) &= \text{ἡμ}\alpha\cdot\text{συν}\beta + \text{συν}\alpha\cdot\text{ἡμ}\beta \\ \text{συν}(\alpha+\beta) &= \text{συν}\alpha\cdot\text{συν}\beta - \text{ἡμ}\alpha\cdot\text{ἡμ}\beta \end{aligned}\right|$$

Ζήτημα 2ο

α) $\mathbf{x+y+z=2\pi \Rightarrow x+y=2\pi-z}$, άρα $\mathbf{\sigma\upsilon\nu(x+y)=\sigma\upsilon\nu(2\pi-z)=\sigma\upsilon\nu z}$

$$
\begin{aligned}
\eta\mu^2x+\eta\mu^2y+\eta\mu^2z-2 &= \frac{1-\sigma\upsilon\nu2x}{2}+\frac{1-\sigma\upsilon\nu2y}{2}+1-\sigma\upsilon\nu^2z-2\\
&= \frac{1-\sigma\upsilon\nu2x+1-\sigma\upsilon\nu2y+2-2\sigma\upsilon\nu^2z-4}{2}\\
&= \frac{-\sigma\upsilon\nu2x-\sigma\upsilon\nu2y-2\sigma\upsilon\nu^2z}{2}\\
&= -\frac{\sigma\upsilon\nu2x+\sigma\upsilon\nu2y+2\sigma\upsilon\nu^2z}{2}\\
&= -\frac{2\sigma\upsilon\nu\frac{2x+2y}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{2x-2y}{2}+2\sigma\upsilon\nu^2z}{2}\\
&= -\frac{2\sigma\upsilon\nu(x+y)\cdot\sigma\upsilon\nu(x-y)+2\sigma\upsilon\nu^2z}{2}\\
&= -\left[\sigma\upsilon\nu(x+y)\cdot\sigma\upsilon\nu(x-y)+\sigma\upsilon\nu^2z\right]\\
&= -\left[\sigma\upsilon\nu z\cdot\sigma\upsilon\nu(x-y)+\sigma\upsilon\nu^2z\right]\\
&= -\sigma\upsilon\nu z\cdot\left[\sigma\upsilon\nu(x-y)+\sigma\upsilon\nu z\right]\\
&= -\sigma\upsilon\nu z\cdot\left[\sigma\upsilon\nu(x-y)+\sigma\upsilon\nu(x+y)\right]\\
&= -\sigma\upsilon\nu z\cdot 2\sigma\upsilon\nu x\cdot\sigma\upsilon\nu y\\
&= -2\cdot\sigma\upsilon\nu x\cdot\sigma\upsilon\nu y\cdot\sigma\upsilon\nu z
\end{aligned}
$$

β) $\eta\mu^2 2A+\eta\mu^2 2B+\eta\mu^2 2\Gamma=2$ και $2A+2B+2\Gamma=2(A+B+\Gamma)=2\pi$

άρα από το (α) ερώτημα έχουμε :

$\eta\mu^2 2A+\eta\mu^2 2B+\eta\mu^2 2\Gamma-2=-2\cdot\sigma\upsilon\nu2A\cdot\sigma\upsilon\nu2B\cdot\sigma\upsilon\nu2\Gamma \Leftrightarrow$

$0=-2\cdot\sigma\upsilon\nu2A\cdot\sigma\upsilon\nu2B\cdot\sigma\upsilon\nu2\Gamma \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu2A=0$ ή $\sigma\upsilon\nu2B=0$ ή $\sigma\upsilon\nu2\Gamma=0$

Είναι $\sigma\upsilon\nu2\omega=0 \overset{0^0<\omega<180^0}{\Rightarrow} 2\omega=90^0$ ή $2\omega=270^0 \Rightarrow \omega=45^0$ ή $\omega=135^0$

- Αν $\sigma\upsilon\nu2A=\sigma\upsilon\nu2B=\sigma\upsilon\nu2\Gamma=0$, τότε

  $(\hat{A}=45^0$ ή $\hat{A}=135^0)$ και $(\hat{B}=45^0$ ή $\hat{B}=135^0)$ και $(\hat{\Gamma}=45^0$ ή $\hat{\Gamma}=135^0)$

  Άτοπο διότι $\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}=180^0$

- Αν $\sigma\upsilon\nu2A=\sigma\upsilon\nu2B=0$ και $\sigma\upsilon\nu2\Gamma\neq0$, τότε

  $\hat{A}=\hat{B}=45^0$ (και $\hat{\Gamma}=90^0$) $\rightarrow$ **ΑΒΓ ορθογώνιο και ισοσκελές**

- Αν $\sigma\upsilon\nu2A=0$ και $\sigma\upsilon\nu2B\cdot\sigma\upsilon\nu2\Gamma\neq0$, τότε

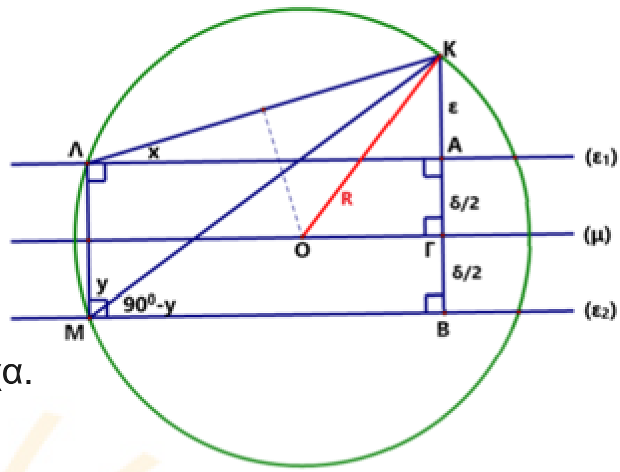
  $(\hat{A}=45^0$ ή $\hat{A}=135^0)$ και $\hat{B}\neq90^0$ και $\hat{\Gamma}\neq90^0$ $\rightarrow$

  ΑΒΓ όχι ορθογώνιο με μια γωνία 45^0 ή **ΑΒΓ τρίγωνο με μια γωνία 135^0**

Ζήτημα 3ο

Έστω μια τυχαία θέση του ΛΜ.

Το κέντρο Ο του περιγεγραμμένου κύκλου του ΚΛΜ βρίσκεται στη μεσοκάθετο (μ) του ΛΜ, δηλαδή στη μεσοπαράλληλο των (ε_1) και (ε_2).



Από το Κ φέρουμε κάθετο στις ε_1 , μ , ε_2 η οποία τις τέμνει στα Α, Γ και Β αντίστοιχα.

Είναι $KA = \varepsilon,\ A\Gamma = \Gamma B = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{\delta}{2}$.

1η λύση

• Αν $\Gamma \equiv O$, τότε $K\Gamma = O\Gamma \Leftrightarrow \varepsilon + \dfrac{\delta}{2} = R$.

• Αν Γ, Ο δεν ταυτίζονται, τότε στο $\overset{\Delta}{KO\Gamma}$ είναι : $K\Gamma < KO \Leftrightarrow \varepsilon + \dfrac{\delta}{2} < R$.

Σε κάθε περίπτωση είναι $\varepsilon + \dfrac{\delta}{2} \le R$.

2η λύση

• Νόμος ημιτόνων στο $\overset{\Delta}{K\Lambda M}$: $\dfrac{K\Lambda}{\eta\mu y} = \dfrac{KM}{\eta\mu(90^0+x)} = 2R \quad (1)$

• Στο $\overset{\Delta}{K\Lambda A}$: $\eta\mu x = \dfrac{KA}{K\Lambda} \Rightarrow K\Lambda = \dfrac{KA}{\eta\mu x} \Rightarrow K\Lambda = \dfrac{\varepsilon}{\eta\mu x} \quad (2)$

• Στο $\overset{\Delta}{KMB}$: $\eta\mu(90^0\text{-}y) = \dfrac{KB}{KM} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu y = \dfrac{\varepsilon+\delta}{KM} \Rightarrow KM = \dfrac{\varepsilon+\delta}{\sigma\upsilon\nu y} \quad (3)$

• $\eta\mu(90^0 + x) = \sigma\upsilon\nu x \quad (4)$

$$(1) \overset{(2),(3)}{\underset{(4)}{\Rightarrow}} \frac{\frac{\varepsilon}{\eta\mu x}}{\eta\mu y} = \frac{\frac{\varepsilon+\delta}{\sigma\upsilon\nu y}}{\sigma\upsilon\nu x} = 2R \Leftrightarrow \frac{\varepsilon}{\eta\mu x\cdot\eta\mu y} = \frac{\varepsilon+\delta}{\sigma\upsilon\nu x\cdot\sigma\upsilon\nu y} = 2R \Rightarrow$$

$$\frac{2\varepsilon+\delta}{\eta\mu x\cdot\eta\mu y + \sigma\upsilon\nu x\cdot\sigma\upsilon\nu y} = 2R \Leftrightarrow \frac{2\varepsilon+\delta}{\sigma\upsilon\nu(x-y)} = 2R \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu(x-y) = \frac{2\varepsilon+\delta}{2R} \quad (5)$$

Είναι $\sigma\upsilon\nu(x - y) \le 1 \overset{(5)}{\Rightarrow} \dfrac{2\varepsilon+\delta}{2R} \le 1 \Leftrightarrow 2\varepsilon + \delta \le 2R \Leftrightarrow \varepsilon + \dfrac{\delta}{2} \le R$