ΓΕΝΙΚΕΣ ΕΙΣΙΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 1968
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ
ΦΥΣΙΚΟΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ ΚΥΚΛΟΣ – ΓΕΩΠΟΝΟΔΑΣΟΛΟΓΙΚΟΣ ΚΥΚΛΟΣ
Δευτέρα 16 Σεπτεμβρίου 1968

Ζήτημα 1ο

Ἐφαπτομένη καὶ συνεφαπτομένη τυχόντος τόξου.

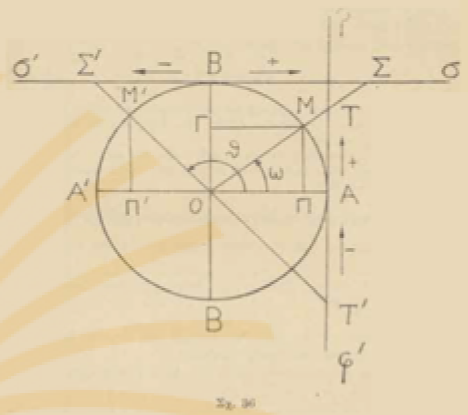
Α΄) Ἐμάθομεν ὅτι διὰ τὴν ὀξεῖαν γωνίαν ω εἶναι $εφω = \frac{\overline{ΠΜ}}{\overline{ΟΠ}} = \frac{\overline{ΑΤ}}{\overline{ΟΑ}}$ (σχ. 36). Ἂν δὲ $(\overline{ΟΑ}) = 1$, ὁ προηγούμενος ὁρισμὸς γίνεται $εφω = (\overline{ΑΤ})$.

Τὴν εὐθεῖαν φ΄φ, ἐπὶ τῆς ὁποίας κεῖται τὸ ἄνυσμα ΑΤ ὀνομάζομεν ἄξονα τῶν ἐφαπτομένων.

Οὗτος ὡς παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα ψ΄ψ ἔχει διευθῦνον ἄνυσμα τὸ $\overline{ΟΒ}$.

Τὸν δὲ προηγούμενον ὁρισμὸν τῆς εφω ἐπεκτείνομεν καὶ διὰ τὸ ἀντίστοιχον τόξον ΑΜ τῆς γωνίας ω καὶ διὰ πᾶν ἐν γένει τόξον τριγωνομετρικῆς περιφερείας, θετικὸν ἢ ἀρνητικὸν ἢ καὶ 0°.

Ὥστε : ***Ἐφαπτομένη τυχόντος τόξου τριγωνομετρικῆς περιφερείας λέγεται τὸ μῆκος τοῦ ἀνύσματος, τὸ ὁποῖον ἔχει τὴν αὐτὴν ἀρχὴν μὲ τὸ τόξον καὶ πέρας τὴν τομὴν τοῦ ἄξονος τῶν ἐφαπτομένων ὑπὸ τῆς προεκτάσεως τῆς τελικῆς ἀκτῖνος τοῦ τόξου.***



Σχ. 36

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τούτου εἶναι φανερὸν ὅτι :

α΄) ***Τὰ τόξα, τὰ ὁποῖα ἔχουσι κοινὰ ὁμώνυμα ἄκρα, ἔχουσι τὴν αὐτὴν ἐφαπτομένην.*** Εἶναι λοιπὸν $εφ(2kπ + τ) = εφτ$, ἂν k εἶναι 0 ἢ τυχὼν ἀκέραιος ἀριθμός.

β΄) ***Ἡ ἐφαπτομένη τόξου ΑΜ εἶναι θετικὴ ἢ ἀρνητική, ἂν τὸ ἄνυσμα ΑΤ εἶναι θετικὸν ἢ ἀρνητικὸν ἄνυσμα. Ἑπομένως :***

γ΄) ***Τὰ τόξα, τὰ ὁποῖα λήγουσιν εἰς τὸ α΄ ἢ γ΄ τεταρτημόριον ἔχουσι θετικὴν ἐφαπτομένην. Τὰ δὲ λήγοντα εἰς τὸ β΄ ἢ δ΄ τεταρτημόριον ἔχουσιν ἀρνητικὴν ἐφαπτομένην.***

Β΄) Ὁμοίως τὸν γνωστὸν ὁρισμὸν $σφω = (\overline{ΒΣ})$ ἐπεκτείνομεν καὶ εἰς τὸ ἀντίστοιχον τόξον ΑΜ τῆς γωνίας καὶ εἰς πᾶν ἐν γένει τόξον θετικὸν ἢ ἀρνητικὸν ἢ καὶ 0°.

Πρὸς τοῦτο τὴν εὐθεῖαν σ΄σ ἐφαπτομένην εἰς τὸ Β τῆς τριγωνομετρικῆς περιφερείας καλοῦμεν ἄξονα τῶν συνεφαπτομένων. Οὗτος ὡς παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα χ΄χ ἔχει τὸ αὐτὸ διευθῦνον ἄνυσμα ΟΑ.

Κατὰ τὰ λεχθέντα λοιπὸν δίδομεν τὸν ἑξῆς ὁρισμόν :

Συνεφαπτομένη ἑνὸς τόξου λέγεται τὸ μῆκος τοῦ ἀνύσματος, τὸ ὁποῖον ἀρχίζει ἀπὸ τὸ πέρας Β τοῦ α΄ τεταρτημορίου τῆς τριγωνομετρικῆς περιφερείας καὶ περατοῦται εἰς τὴν τομὴν τοῦ ἄξονος τῶν συνεφαπτομένων ὑπὸ τῆς προεκτάσεως τῆς τελικῆς ἀκτῖνος τοῦ τόξου.

Ἀπὸ τὸν ὁρισμὸν τοῦτον εἶναι φανερὰ τὰ ἑξῆς :

α΄) ***Τὰ τόξα, τὰ ὁποῖα ἔχουσι τὰ αὐτὰ ὁμώνυμα ἄκρα, ἔχουσι τὴν αὐτὴν συνεφαπτομένην.*** Εἶναι λοιπὸν $σφ(2kπ + τ) = σφτ$, ἂν k εἶναι 0 ἢ τυχὸν ἀκέραιος ἀριθμός.

β΄) ***Ἡ συνεφαπτομένη ἑνὸς τόξου εἶναι θετικὴ ἢ ἀρνητική, ἂν τὸ ἄνυσμα ΒΣ εἶναι θετικὸν ἢ ἀρνητικὸν ἄνυσμα. Ἑπομένως :***

γ΄) ***Τὰ τόξα, τὰ ὁποῖα λήγουσιν εἰς τὸ α΄ ἢ γ΄ τεταρτημόριον ἔχουσι θετικὴν συνεφαπτομένην. Τὰ δὲ λήγοντα εἰς τὸ β΄ ἢ δ΄ τεταρτημόριον ἔχουσιν ἀρνητικὴν συνεφαπτομένην.***

Ἐφαπτομένη καὶ συνεφαπτομένη τυχούσης γωνίας.

Κατὰ τὰ προηγούμενα ἡ ἐφαπτομένη καὶ ἡ συνεφαπτομένη μιᾶς ὀξείας γωνίας ω (σχ. 36) συμπίπτει ἀντιστοίχως μὲ τὴν ἐφαπτομένην καὶ συνεφαπτομένην τοῦ ἀντιστοίχου τόξου. Διὰ νὰ εἶναι ἡ σύμπτωσις αὕτη γενική, δίδομεν τοὺς ἑξῆς ὁρισμούς.

Ἐφαπτομένη τυχούσης γωνίας λέγεται ἡ ἐφαπτομένη τοῦ ἀντιστοίχου τόξου αὐτῆς, ἂν ἡ γωνία αὕτη γίνῃ ἐπίκεντρος εἰς τριγωνομετρικὸν κύκλον.

Συνεφαπτομένη τυχούσης γωνίας λέγεται ἡ συνεφαπτομένη τοῦ ἀντιστοίχου τόξου, ἂν ἡ γωνία γίνῃ ἐπίκεντρος εἰς τριγωνομετρικὸν κύκλον.

Κατὰ ταῦτα, πᾶν ὅ,τι γνωρίζομεν ἢ θὰ μάθωμεν διὰ τὴν ἐφαπτομένην καὶ συνεφαπτομένην τῶν τόξων ἀληθεύει καὶ διὰ τὴν ἐφαπτομένην καὶ τὴν συνεφαπτομένην τῶν γωνιῶν.

Μεταβολὴ τῆς ἐφαπτομένης καὶ συνεφαπτομένης τόξου. Παρακολουθοῦντες τὴν μεταβολὴν τοῦ $(\overline{ΑΤ})$ καὶ τοῦ $(\overline{ΒΣ})$ (σχ. 36), ὅταν τὸ πέρας Μ τοῦ τόξου ΑΜ διαγράφῃ τὸ α′ καὶ β′ τεταρτημόριον, καταλήγομεν εἰς τὸν ἀκόλουθον πίνακα, ὅστις εἶναι σύμπτυξις τῶν γνωστῶν πινάκων (§ 25, 35, 58).

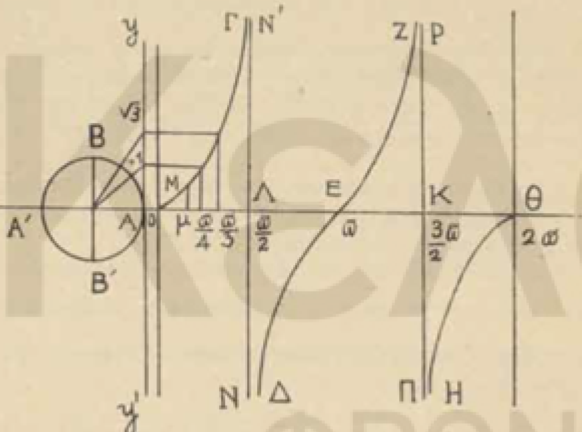
τ	0°	$\nearrow$	90°		$\nearrow$	180°
τ	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$		$\nearrow$	π
ἐφτ	0	$\nearrow$	$+\infty$	$-\infty$	$\nearrow$	0
σφτ	∞	$\searrow$	0		$\searrow$	$-\infty$

Ἂν δὲ τὸ Μ διαγράφῃ τὸ γ′ τεταρτημόριον, ὁ ἀριθμὸς $(\overline{ΑΤ})$ βαίνει αὐξανόμενος μέχρι τοῦ $+\infty$, μεταπηδᾷ πάλιν εἰς τὸ $-\infty$, εὐθὺς ὡς τὸ Μ ὑπερβῇ τὸ Β′, ἐξακολουθεῖ αὐξανόμενος καὶ γίνεται 0, ὅταν τὸ Μ εὑρεθῇ εἰς τὴν ἀρχὴν Α.

Ὁ δὲ ἀριθμὸς (ΒΣ) μεταπηδᾷ εἰς τὸ $+\infty$, εὐθὺς ὡς τὸ Μ ὑπερβῇ τὸ Α′. Ἔπειτα δὲ ἐξακολουθεῖ ἐλαττούμενος, ὡς καὶ κατὰ τὴν προηγουμένην κίνησιν τοῦ Μ. Ἐκ πάντων τούτων προκύπτει ὁ ἀκόλουθος πίναξ.

τ	0°	$\nearrow$	90°		$\nearrow$	180°		$\nearrow$	270°		$\nearrow$	360°
τ	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$		$\nearrow$	π		$\nearrow$	$\frac{3\pi}{2}$		$\nearrow$	2π
ἐφτ	0	$\nearrow$	$+\infty$	$-\infty$	$\nearrow$	0		$\nearrow$	$+\infty$	$-\infty$	$\nearrow$	0
σφτ	∞	$\searrow$	0		$\searrow$	$-\infty$	$+\infty$	$\searrow$	0		$\searrow$	$-\infty$

Ἂν δὲ τὸ τόξον τ ἐξακολουθῇ αὐξανόμενον ὑπὲρ τὰς 360°, τὸ πέρας Μ αὐτοῦ διέρχεται ἀπὸ τὰς αὐτὰς κατὰ σειρὰν θέσεις, ἕκαστος δὲ τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν ἐφτ καὶ σφτ λαμβάνει τὰς προηγουμένας τιμὰς αὐτοῦ καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν σειράν.



Σχ. 37

Γραφικὴ παράστασις τῶν μεταβολῶν τῆς ἐφαπτομένης τόξου. Τὴν προηγουμένως σπουδασθεῖσαν μεταβολὴν τῆς ἐφαπτομένης τόξου αἰσθητοποιοῦμεν ὡς ἑξῆς :

Ἐπὶ τοῦ ἄξονος χ′χ (σχ. 37) ὁρίζομεν ἄνυσμα ΟΛ ἔχον μῆκος ἴσον πρὸς τὸ μῆκος $\frac{\pi}{2}$ τεταρτημορίου τριγωνομετρικῆς περιφερείας, ἄνυσμα ΟΕ μήκους π, ἄλλο ΟΚ μήκους $\frac{3\pi}{2}$ καὶ ἄλλο ΟΘ μήκους 2π.

Εἰς τυχὸν τόξον μήκους $(\overline{Ομ}) < \frac{\pi}{2}$ ἀντιστοιχεῖ ἄνυσμα μΜ κάθετον ἐπὶ τὸν ἄξονα χ′χ καὶ ἔχον μῆκος ἴσον πρὸς τὴν ἐφαπτομένην τοῦ τόξου τούτου. Ἂν δὲ τὸ τόξον βαίνῃ αὐξανόμενον ἀπὸ 0° ἕως 90°, τὸ μῆκός του βαίνει αὐξανόμενον ἀπὸ 0 ἕως $\frac{\pi}{2}$ καὶ τὸ ἄκρον μ τοῦ ἀνύσματος Ομ ἀπὸ τοῦ Ο πλησιάζει πρὸς τὸ Λ καὶ συμπίπτει μὲ αὐτό, ἂν τὸ τόξον γίνῃ 90°.

Ἐπειδὴ δὲ ἡ ἐφαπτομένη τοῦ τόξου βαίνει αὐξανομένη ἀπὸ 0 ἕως $+\infty$, ἕπεται ὅτι τὰ ἀνύσματα μΜ βαίνουσιν αὐξανόμενα ἀπὸ 0 μέχρι τοῦ $+\infty$. Τὰ ἄκρα δὲ Μ αὐτῶν ἀποτελοῦσι καμπύλην ΟΜΓ, ἥτις συνεχῶς ἀπομακρύνεται τῶν ἀξόνων χ′χ, ψ′ψ καὶ πλησιάζει ἀπαύστως πρὸς τὴν εὐθεῖαν Ν′ΛΝ χωρὶς νὰ συναντᾷ αὐτήν ποτέ.

Ἂν δὲ τὸ τόξον ὑπερβῇ κατ' ἐλάχιστον τὰς 90°, τὸ μῆκός του γίνεται κατ' ἐλάχιστον μεγαλύτερον τοῦ $(\overline{ΟΛ})$ καὶ τὸ μ ἐμφανίζεται δεξιὰ τοῦ Λ καὶ ἐγγύτατα αὐτοῦ.

Ἐπειδὴ δὲ τότε ἡ ἐφαπτομένη μεταπηδᾷ εἰς τὸ $-\infty$, τὸ ἀντίστοιχον σημεῖον Μ ἐμφανίζεται πρὸς τὴν διεύθυνσιν Οψ′ εἰς ἄπειρον ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ χ′χ, ἐγγύτατα τῆς εὐθείας Ν′ΛΝ καὶ δεξιὰ αὐτῆς. Ἔπειτα τοῦ τόξου αὐξανομένου ἀπὸ 90° ἕως 180° ἡ ἀρνητικὴ ἐφαπτομένη του βαίνει αὐξανομένη ἀπὸ $-\infty$ ἕως 0. Τὰ δὲ ἀντίστοιχα σημεῖα Μ ἀποτελοῦσι καμπύλην ΔΕ.

Αὕτη συνεχῶς ἀπομακρύνεται ἀπὸ τὴν Ν′ΛΝ καὶ πλησιάζει πρὸς τὸν ἄξονα χ′χ, τὸν ὁποῖον συναντᾷ εἰς τὸ σημεῖον Ε.

Τοῦ τόξου δὲ αὐξανομένου ἀπὸ 180° ἕως 270° ἡ καμπύλη ἀπομακρύνεται τῶν εὐθειῶν Ν′ΛΝ, χ′χ καὶ ἀπαύστως πλησιάζει πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΡΠ κάθετον ἐπὶ τὸν ἄξονα χ′χ εἰς τὸ Κ χωρὶς ὅμως νὰ συναντᾷ αὐτήν ποτέ.

Ὅταν τέλος τὸ τόξον βαίνῃ αὐξανόμενον ἀπὸ 270° ἕως 360°, ἡ καμπύλη ἐμφανίζεται πρὸς τὴν διεύθυνσιν τῆς ΚΠ, δεξιὰ καὶ ἐγγύτατα αὐτῆς· βαίνει δὲ ἀπομακρυνομένη αὐτῆς καὶ πλησιάζει πρὸς τὸν ἄξονα χ′χ, τὸν ὁποῖον συναντᾷ εἰς τὸ σημεῖον Θ.

Ἡ καμπύλη λοιπὸν ΟΜΓΔΕΖΗΘ αἰσθητοποιεῖ τὴν μεταβολὴν τῆς ἐφαπτομένης τόξου, ἂν τοῦτο συνεχῶς βαίνῃ αὐξανόμενον ἀπὸ 0 ἕως 360°. Ἡ συνέχεια αὐτῆς διακόπτεται εἰς τὰ σημεῖα αὐτῆς, τὰ ὁποῖα ἀντιστοιχοῦσιν εἰς τὰ τόξα 90° καὶ 270° ἕνεκα τῆς μεταπηδήσεως τῆς ἐφαπτομένης ἀπὸ $+\infty$ εἰς $-\infty$. Διὰ τοῦτο ἡ συνάρτησις ἐφχ λέγεται *ἀσυνεχὴς* συνάρτησις διὰ $χ=\frac{\pi}{2}$ καὶ διὰ $χ=\frac{3\pi}{2}$.

Σημείωσις. Αἱ εὐθεῖαι Ν′ΛΝ καὶ ΠΚΡ λέγονται *ἀσύμπτωτοι* τῆς καμπύλης ταύτης.

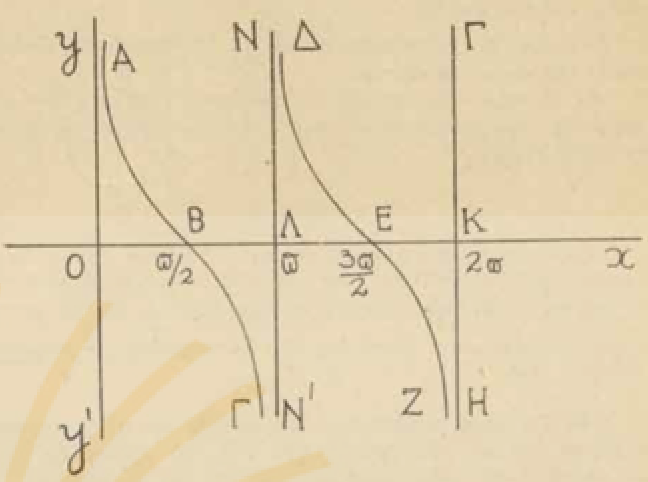
Ἂν τὸ τόξον ἐξακολουθῇ αὐξανόμενον ὑπὲρ τὰς 360°, οἱ κλάδοι τῆς προηγουμένης καμπύλης ἐπαναλαμβάνονται κατὰ τὴν αὐτὴν σειράν.

. Γραφική παράστασις τῶν μεταβολῶν τῆς συνεφαπτομένης τόξου. Ἄν ἐργασθῶμεν διά τάς μεταβολάς τῆς συνεφαπτομένης, ὅπως προηγουμένως διά τάς μεταβολάς τῆς ἐφαπτομένης, σχηματίζομεν τήν καμπύλην ΑΒΓΔΕΖ (σχ. 38).

Δι' αὐτῆς αἰσθητοποιοῦμεν τάς μεταβολάς τῆς συνεφαπτομένης τόξου διά μεταβολήν τοῦ τόξου ἀπό 0° ἕως 360°.

Ἡ καμπύλη αὐτή ἔχει ἀσύμπτωτον τόν ἄξονα ψ'ψ καί τάς εὐθείας Ν'ΛΝ, ΗΚΓ.

Ἄν τό τόξον ἐξακολουθήσῃ αὐξανόμενον ὑπέρ τάς 360°, οἱ κλάδοι τῆς καμπύλης ἐπαναλαμβάνονται κατά τήν αὐτήν σειράν.



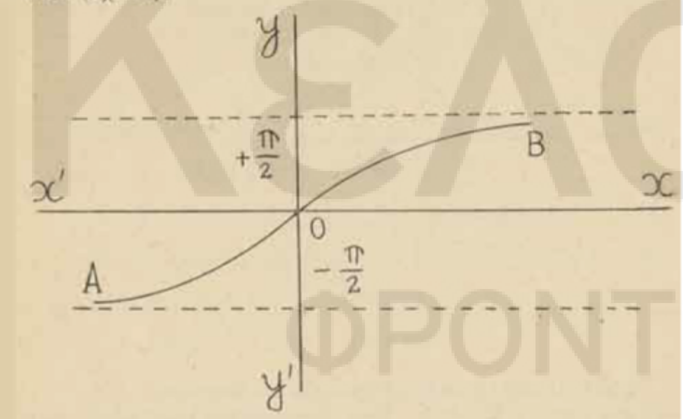
Σχ. 38

Γ') Ἡ συνάρτησις τόξον ἐφχ. Ὁμοίως ἐκ τῆς ἐφψ=χ ἕπεται ὅτι ψ = τόξ ἐφχ, ἤτοι: ψ εἶναι τόξον, τό ὁποῖον ἔχει ἐφαπτομένην τόν ἀριθμόν χ.

Ἡ συνάρτησις ψ λέγεται ἀντίστροφος συνάρτησις τοῦ χ, δηλ. τῆς ἐφψ. Καί ἡ συνάρτησις αὐτή λαμβάνει ἀπείρους τιμάς δι' ἑκάστην τιμήν α τοῦ χ. Ἄν δέ θεωρήσωμεν μόνον τάς μεταξύ $-\frac{\pi}{2}$ καί $\frac{\pi}{2}$ τιμάς αὐτῆς, καταρτίζομεν τόν ἀκόλουθον πίνακα:

χ	$-\infty \ldots \nearrow \ldots -1 \ldots \nearrow \ldots 0 \ldots \nearrow \ldots 1 \ldots \nearrow \ldots +\infty$
ψ = τόξ ἐφχ	$-\frac{\pi}{2} \ldots \nearrow \ldots -\frac{\pi}{4} \ldots \nearrow \ldots 0 \ldots \nearrow \ldots \frac{\pi}{4} \ldots \nearrow \ldots \frac{\pi}{2}$

Τήν μεταβολήν ταύτην αἰσθητοποιοῦμεν διά τῆς καμπύλης ΑΟΒ (σχ. 53).

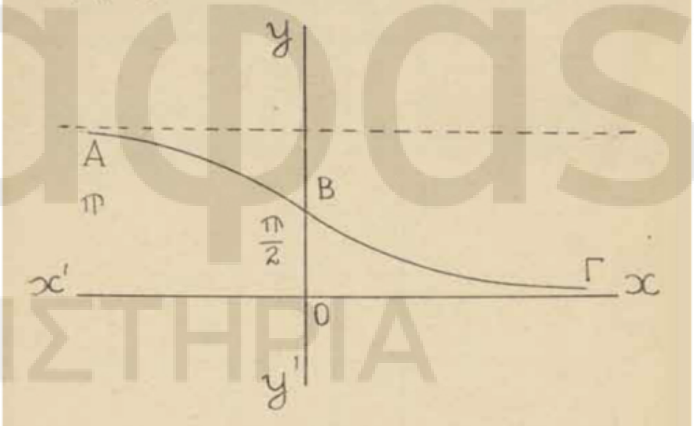


Σχ. 53

Δ') Ἡ συνάρτησις τόξσφχ. Τέλος ἐκ τῆς σφψ = χ ἕπεται ὅτι ψ = τόξσφχ, ἤτοι ἡ ψ εἶναι ἀντίστροφος συνάρτησις τοῦ χ, δηλ. τῆς σφψ. Καί ἡ συνάρτησις αὐτή ψ λαμβάνει ἀπείρους τιμάς δι' ἑκάστην τιμήν α τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβολῆς χ. Θεωροῦντες ἐκ τούτων τάς μεταξύ 0 καί π καταρτίζομεν τόν ἀκόλουθον πίνακα.

χ	$-\infty \ldots \nearrow \ldots -1 \ldots \nearrow 0 \ldots \nearrow 1 \ldots \nearrow \ldots + \ldots \infty$
ψ = τοξσφχ	$\pi \ldots \searrow \ldots \frac{3\pi}{4} \ldots \searrow \frac{\pi}{2} \ldots \searrow \frac{\pi}{4} \ldots \searrow \ldots 0$

Τήν μεταβολήν ταύτην αἰσθητοποιοῦμεν διά τῆς καμπύλης ΑΒΓ (σχ. 54).



Σχ. 54

Ζήτημα 2ο

$$(\Sigma):\begin{cases} x + y = \alpha \quad (1) \\ \sigma\upsilon\nu x \cdot \sigma\upsilon\nu y = \lambda \cdot \eta\mu\alpha \quad (2) \end{cases}$$

$$(2) \Rightarrow \frac{\sigma\upsilon\nu(x+y) + \sigma\upsilon\nu(x-y)}{2} = \lambda \cdot \eta\mu\alpha \overset{(1)}{\Rightarrow} \sigma\upsilon\nu\alpha + \sigma\upsilon\nu(x-y) = 2\lambda \cdot \eta\mu\alpha \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu(x-y) = 2\lambda \cdot \eta\mu\alpha - \sigma\upsilon\nu\alpha \quad (3)$$

▹ Αν $2\lambda \cdot \eta\mu\alpha - \sigma\upsilon\nu\alpha < -1$ ή $2\lambda \cdot \eta\mu\alpha - \sigma\upsilon\nu\alpha > 1$ το σύστημα είναι ΑΔΥΝΑΤΟ.

▹ Αν $-1 \le 2\lambda \cdot \eta\mu\alpha - \sigma\upsilon\nu\alpha \le 1 \Leftrightarrow -1 + \sigma\upsilon\nu\alpha \le 2\lambda \cdot \eta\mu\alpha \le 1 + \sigma\upsilon\nu\alpha \quad (4)$

- Αν $\eta\mu\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = \kappa\pi, \kappa \in Z$ και $\sigma\upsilon\nu\alpha = \pm 1 \quad (5)$

  Η (4) ισχύει και η (3) γίνεται : $\sigma\upsilon\nu(x-y) = \mp 1 \Leftrightarrow x - y = \mu\pi, \mu \in Z \quad (6)$

  Από (5) και (6) το (Σ) ισοδυναμεί με το $\begin{cases} x + y = \kappa\pi, \kappa \in Z \\ x - y = \mu\pi, \mu \in Z \end{cases}$

  από το οποίο προκύπτει $(x, y) = \left((\kappa + \mu)\frac{\pi}{2}, (\kappa - \mu)\frac{\pi}{2}\right), \ \kappa, \mu \in Z$

- Αν $\eta\mu\alpha > 0$ τότε η (4) γίνεται $\frac{-1 + \sigma\upsilon\nu\alpha}{2\eta\mu\alpha} \le \lambda \le \frac{1 + \sigma\upsilon\nu\alpha}{2\eta\mu\alpha}$.

  Για $\lambda \in \left[\frac{-1 + \sigma\upsilon\nu\alpha}{2\eta\mu\alpha}, \frac{1 + \sigma\upsilon\nu\alpha}{2\eta\mu\alpha}\right]$ υπάρχει γωνία $\omega \in [0, \pi]$,

  τέτοια ώστε $\sigma\upsilon\nu\omega = 2\lambda \cdot \eta\mu\alpha - \sigma\upsilon\nu\alpha$ και η (3) γίνεται :

  $\sigma\upsilon\nu(x-y) = \sigma\upsilon\nu\omega \Leftrightarrow x - y = 2\kappa\pi \pm \omega, \kappa \in Z \quad (7)$

  Από (1) και (7) το (Σ) ισοδυναμεί με τα συστήματα $\begin{cases} x + y = \alpha \\ x - y = 2\kappa\pi \pm \omega, \kappa \in Z \end{cases}$

  από τα οποία προκύπτουν $(x, y) = \left(\kappa\pi + \frac{\alpha \pm \omega}{2}, -\kappa\pi + \frac{\alpha \mp \omega}{2}\right), \ \kappa \in Z$

- Αν $\eta\mu\alpha < 0$ τότε η (4) γίνεται $\frac{-1 + \sigma\upsilon\nu\alpha}{2\eta\mu\alpha} \ge \lambda \ge \frac{1 + \sigma\upsilon\nu\alpha}{2\eta\mu\alpha}$.

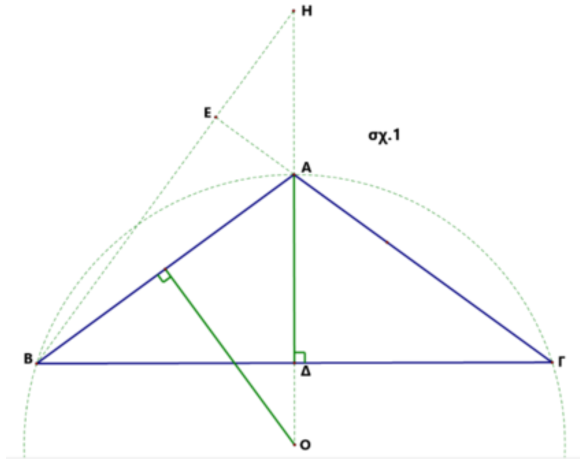
  Για $\lambda \in \left[\frac{1 + \sigma\upsilon\nu\alpha}{2\eta\mu\alpha}, \frac{-1 + \sigma\upsilon\nu\alpha}{2\eta\mu\alpha}\right]$ υπάρχει γωνία $\omega \in [0, \pi]$,

  τέτοια ώστε $\sigma\upsilon\nu\omega = 2\lambda \cdot \eta\mu\alpha - \sigma\upsilon\nu\alpha$

  και όμοια επιλύοντας βρίσκουμε $(x, y) = \left(\kappa\pi + \frac{\alpha \pm \omega}{2}, -\kappa\pi + \frac{\alpha \mp \omega}{2}\right), \ \kappa \in Z$

Ζήτημα 3ο

$OH = \frac{α}{2} = \frac{2R \cdot ημA}{2} = R \cdot ημA \ \ (1)$ και $OA = R \ \ (2)$



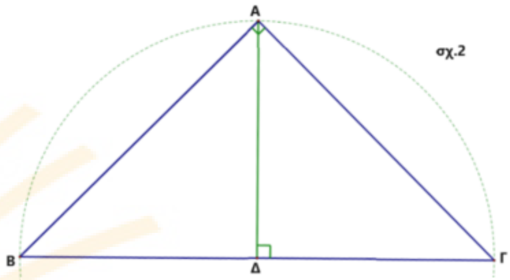
- Αν $\hat{A} > 90^0$ (σχ.1), τότε :

  Το A είναι μεταξύ των H και O.

  $OH > OA \overset{(1)}{\underset{(2)}{\Rightarrow}} R \cdot ημα > R \Rightarrow ημA > 1$ (άτοπο)

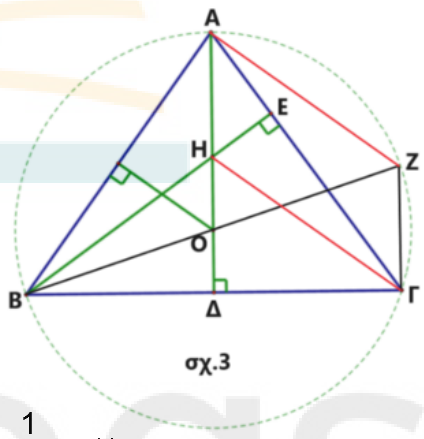
- Αν $\hat{A} = 90^0$ (σχ.2), τότε :

  $H \equiv A$ και $O \equiv Δ$ και είναι $OH = AΔ = \frac{α}{2}$ και $\boxed{ημA = 1}$.



- Αν $60^0 < \hat{A} < 90^0$ (σχ.3), τότε :

  Το H είναι μεταξύ των A και O.



σχ.3

1ος τρόπος

Είναι $B\hat{O}Δ = \hat{A}$ και $B\hat{H}Δ = \hat{Γ} = 90^0 - \frac{\hat{A}}{2}$.

▷ $σφB\hat{H}Δ = \frac{HΔ}{BΔ} \Rightarrow σφ\left(90^0 - \frac{A}{2}\right) = \frac{HΔ}{\frac{α}{2}} \Rightarrow$

$$εφ\frac{A}{2} = \frac{2HΔ}{α} \Rightarrow HΔ = \frac{α \cdot εφ\frac{A}{2}}{2} \ \ (3)$$

▷ $εφB\hat{O}Δ = \frac{BΔ}{OΔ} \Rightarrow εφA = \frac{\frac{α}{2}}{OΔ} \Rightarrow OΔ = \frac{α}{2εφA} \ \ (4)$

▷ $OH = HΔ - OΔ \overset{(3)}{\underset{(4)}{\Rightarrow}} \frac{α}{2} = \frac{α \cdot εφ\frac{A}{2}}{2} - \frac{α}{2εφA} \Leftrightarrow 1 = εφ\frac{A}{2} - \frac{1}{εφA} \Leftrightarrow$

$$1 = εφ\frac{A}{2} - \frac{1 - εφ^2\frac{A}{2}}{2εφ\frac{A}{2}} \Leftrightarrow 2εφ\frac{A}{2} = 2εφ^2\frac{A}{2} - 1 + εφ^2\frac{A}{2} \Leftrightarrow$$

$$3εφ^2\frac{A}{2} + 2εφ\frac{A}{2} - 1 = 0 \Leftrightarrow εφ\frac{A}{2} = 1 \text{ ή } εφ\frac{A}{2} = -\frac{1}{3} \text{ (άτοπο)}$$

2ος τρόπος

Φέρνουμε τη διάμετρο BZ. Το HΓZA είναι παραλληλόγραμμο.

▷ $AH = ΓZ = 2R \cdot συνB\hat{Z}Γ = 2R \cdot συνA \ \ (5)$

▷ $OH = OA - AH \overset{(5)}{\underset{(6)}{=}} R - 2R \cdot συνA = R \cdot (1 - 2συνA) \ \ (6)$

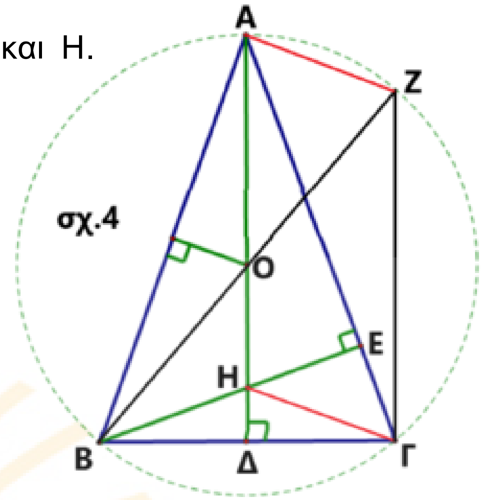
▷ $(1), (6) \Rightarrow R \cdot ημA = R \cdot (1 - 2συνA) \Leftrightarrow ημA = 1 - 2συνA \Leftrightarrow 1 - ημA = 2συνA \Rightarrow$

$(1 - ημA)^2 = 4συν^2A \Leftrightarrow 1 - 2ημA + ημ^2A = 4 - 4ημ^2A \Leftrightarrow 5ημ^2A - 2ημA - 3 = 0 \Leftrightarrow$

$ημA = -\frac{3}{5}$ ή $ημA = 1$ (απορρίπτονται)

- Αν $\hat{A} = 60^0$, τότε $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ ισόπλευρο και $O \equiv H$ (άτοπο).

- Αν $\hat{A} < 60^0$ (σχ.4), τότε : Το O είναι μεταξύ των A και H.



1^{ος} τρόπος

Είναι $B\hat{O}\Delta = \hat{A}$ και $B\hat{H}\Delta = \hat{\Gamma} = 90^0 - \dfrac{\hat{A}}{2}$.

▷ $\sigma\varphi B\hat{H}\Delta = \dfrac{H\Delta}{B\Delta} \Rightarrow \sigma\varphi\left(90^0 - \dfrac{A}{2}\right) = \dfrac{H\Delta}{B\Delta} \Rightarrow$

$$\varepsilon\varphi\frac{A}{2} = \frac{2H\Delta}{\alpha} \Rightarrow H\Delta = \frac{\alpha\cdot\varepsilon\varphi\dfrac{A}{2}}{2} \quad (3)$$

▷ $\varepsilon\varphi B\hat{O}\Delta = \dfrac{B\Delta}{O\Delta} \Rightarrow \varepsilon\varphi A = \dfrac{\frac{\alpha}{2}}{O\Delta} \Rightarrow O\Delta = \dfrac{\alpha}{2\varepsilon\varphi A} \quad (4)$

▷ $OH = O\Delta - H\Delta \overset{(3)}{\underset{(4)}{\Rightarrow}} \dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\alpha}{2\varepsilon\varphi A} - \dfrac{\alpha\cdot\varepsilon\varphi\dfrac{A}{2}}{2} \Leftrightarrow 1 = \dfrac{1}{\varepsilon\varphi A} - \varepsilon\varphi\dfrac{A}{2} \Leftrightarrow$

$$1 = \frac{1 - \varepsilon\varphi^2\dfrac{A}{2}}{2\varepsilon\varphi\dfrac{A}{2}} - \varepsilon\varphi\frac{A}{2} \Leftrightarrow 2\varepsilon\varphi\frac{A}{2} = 1 - \varepsilon\varphi^2\frac{A}{2} - 2\varepsilon\varphi^2\frac{A}{2} \Leftrightarrow$$

$$3\varepsilon\varphi^2\frac{A}{2} - 2\varepsilon\varphi\frac{A}{2} - 1 = 0 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\frac{A}{2} = -1 \text{(απορρίπτεται) ή } \varepsilon\varphi\frac{A}{2} = \frac{1}{3}.$$

▷ $\varepsilon\varphi\dfrac{A}{2} = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow \sqrt{\dfrac{1 - \sigma\upsilon\nu A}{1 + \sigma\upsilon\nu A}} = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow \dfrac{1 - \sigma\upsilon\nu A}{1 + \sigma\upsilon\nu A} = \dfrac{1}{9} \Leftrightarrow$

$$1 + \sigma\upsilon\nu A = 9 - 9\sigma\upsilon\nu A \Leftrightarrow 10\sigma\upsilon\nu A = 8 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu A = \frac{4}{5}$$

$$\eta\mu A = \sqrt{1 - \sigma\upsilon\nu^2 A} = \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{9}{25}} \Rightarrow \boxed{\eta\mu A = \frac{3}{5}}$$

2^{ος} τρόπος

Φέρνουμε τη διάμετρο BZ. Το $H\Gamma ZA$ είναι παραλληλόγραμμο

▷ $AH = \Gamma Z = 2R\cdot\sigma\upsilon\nu B\hat{Z}\Gamma = 2R\cdot\sigma\upsilon\nu A \quad (5)$

▷ $OH = AH - OA \overset{(5)}{\underset{(6)}{=}} 2R\cdot\sigma\upsilon\nu A - R = R\cdot(2\sigma\upsilon\nu A - 1) \quad (6)$

▷ $(1), (6) \Rightarrow R\cdot\eta\mu A = R\cdot(2\sigma\upsilon\nu A - 1) \Leftrightarrow \eta\mu A = 2\sigma\upsilon\nu A - 1 \Leftrightarrow 1 + \eta\mu A = 2\sigma\upsilon\nu A \Rightarrow$

$$(1 + \eta\mu A)^2 = 4\sigma\upsilon\nu^2 A \Leftrightarrow 1 + 2\eta\mu A + \eta\mu^2 A = 4 - 4\eta\mu^2 A \Leftrightarrow 5\eta\mu^2 A + 2\eta\mu A - 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\eta\mu A = \frac{3}{5}} \quad \text{ή} \quad \eta\mu A = -1 \text{ (απορρίπτεται)}$$