ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟΥ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΟΥ 1965

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΕ ΑΛΓΕΒΡΑ - ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ - ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΤΥΠΟΣ Α΄

Πέμπτη 16 Σεπτεμβρίου 1965

ΑΛΓΕΒΡΑ

Ζήτημα 1ο

Εξίσωση πρώτου βαθμού με αγνώστους x και y λέγεται η εξίσωση της μορφής

$$\alpha x + \beta y = \gamma$$

με α, β, γ να είναι αριθμοί ή παραστάσεις που δεν περιέχουν τους x, y.

Ζήτημα 2ο

Ισχύουν : $\alpha \cdot x_1 + \beta \cdot y_1 = 0$ (1) και $\alpha \cdot x_2 + \beta \cdot y_2 = 0$ (2)

$$\begin{aligned}
\alpha \cdot \xi_1 + \beta \cdot \xi_1 &= \alpha \cdot (\gamma_1 \cdot x_1 + \gamma_2 \cdot x_2) + \beta \cdot (\gamma_1 \cdot y_1 + \gamma_2 \cdot y_2) \\
&= \alpha \cdot \gamma_1 \cdot x_1 + \alpha \cdot \gamma_2 \cdot x_2 + \beta \cdot \gamma_1 \cdot y_1 + \beta \cdot \gamma_2 \cdot y_2 \\
&= \gamma_1 \cdot (\alpha \cdot x_1 + \beta \cdot y_1) + \gamma_2 \cdot (\alpha \cdot x_2 + \beta \cdot y_2) \\
&\underset{(2)}{\overset{(1)}{=}} \gamma_1 \cdot 0 + \gamma_2 \cdot 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

δηλαδή το ζεύγος (ξ_1 , ξ_2) είναι επίσης λύση της εξίσωσης $\alpha x + \beta y = 0$.

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

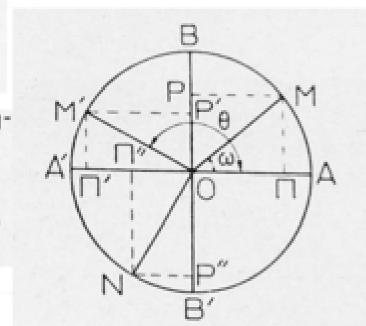
Ζήτημα 1ο

Συνημίτονον ὀξείας γωνίας ἑνὸς ὀρθ. τριγώνου λέγεται ὁ λόγος τῆς καθέτου πλευρᾶς, εἰς τὴν ὁποίαν πρόσκειται ἡ γωνία αὕτη, πρὸς τὴν ὑποτείνουσαν.

Συνημίτονον ἀμβλείας γωνίας λέγεται τὸ ἀντίθετον συνημίτονον τῆς παραπληρωματικῆς γωνίας αὐτῆς.

Συνημίτονον τυχόντος τόξου τριγωνομετρικῆς περιφερείας λέγεται τὸ μῆκος τῆς προβολῆς τῆς τελικῆς ἀκτῖνος αὐτοῦ ἐπὶ τὸν ἄξονα τῶν συνημιτόνων.

Συνημίτονον τυχούσης γωνίας λέγεται τὸ συνημίτονον τοῦ ἀντιστοίχου τόξου αὐτῆς, ἂν αὕτη γίνῃ ἐπίκεντρος εἰς τριγωνομετρικὸν κύκλον.



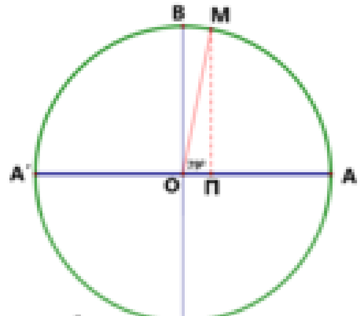
$$\sigma\upsilon\nu\omega = (\overline{O\Pi}) = \overline{O\Pi} : \overline{OM} = \overline{O\Pi} : \overline{OA}$$

Ζήτημα 2ο

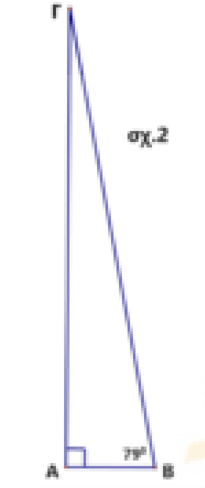
1η λύση (σχ.1)

Στον τριγωνομετρικό κύκλο είναι $A\hat{O}M = 79^0$

$συν79^0 = OΠ < OA = 1$



σχ.1



σχ.2

2η λύση (σχ.2)

Στο ορθογώνιο $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ είναι $\hat{B} = 79^0$:

$$συν79^0 = \frac{AB}{B\Gamma} = \frac{AB}{\sqrt{AB^2 + A\Gamma^2}} < \frac{AB}{\sqrt{AB^2}} = 1$$

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Ζήτημα 1ο

Κύλινδρος εἶναι ἕνα στερεόν, τὸ ὁποῖον σχηματίζεται ἀπὸ ἕνα ὀρθογώνιον, ἂν στραφῇ περὶ μίαν ἀκίνητον πλευράν του καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν φοράν, ἕως ὅτου γυρίσῃ εἰς τὴν πρώτην θέσιν του.

Κῶνος εἶναι ἕνα στερεὸν σῶμα, τὸ ὁποῖον γίνεται ἀπὸ ἕνα ὀρθογώνιον τρίγωνον, ἂν τοῦτο στραφῇ περὶ μίαν ἀκίνητον πλευρὰν τῆς ὀρθῆς γωνίας του κατὰ τὴν αὐτὴν φορὰν καὶ ἕως ὅτου γυρίσῃ εἰς τὴν πρώτην του θέσιν.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν ὄγκον Θ ἑνὸς κυλίνδρου, πολλαπλασιάζομεν τὴν βάσιν β ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ

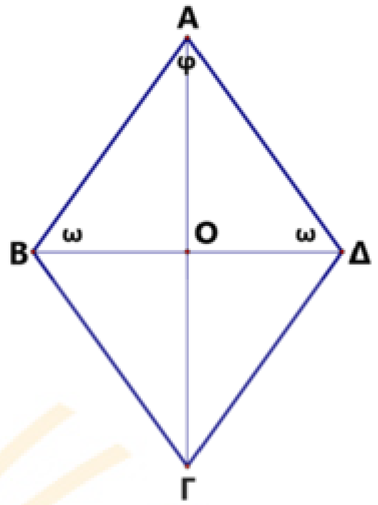
Εἶναι δηλαδή: Θ = β x υ.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν ὄγκον ἑνὸς κώνου, πολλαπλασιάζομεν τὴν βάσιν ἐπὶ τὸ ὕψος καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ 3.

Εἶναι δηλαδή : Θ = β x υ / 3

Ζήτημα 2ο

1η λύση



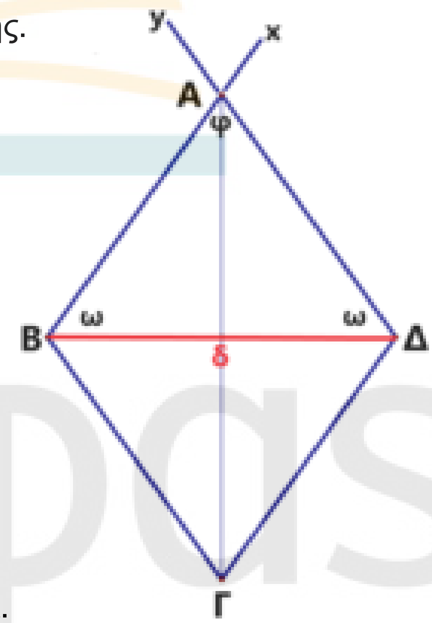
Ανάλυση

Έστω ΑΒΓΔ ο ζητούμενος ρόμβος στον οποίο γνωρίζουμε τη διαγώνιό του $ΒΔ = δ$ και τη γωνία $Β\hat{Α}Δ = φ$

Το $\overset{\Delta}{ΑΒΔ}$ είναι ισοσκελές ($ΑΒ = ΑΔ$), άρα

$Α\hat{Β}Δ = Α\hat{Δ}Β = ω = \dfrac{180^0 - φ}{2}$.

Επομένως το τρίγωνο $\overset{\Delta}{ΑΒΔ}$ είναι κατασκευάσιμο αφού γνωρίζουμε μια πλευρά και τις προσκείμενες σ΄αυτή γωνίες.
Τέλος αφού ΒΓ//ΑΔ και ΓΔ//ΑΒ, το σημείο Γ ορίζεται επίσης.



Κατασκευή

Σχεδιάζουμε ευθύγραμμο τμήμα $ΒΔ = δ$.
Στα σημεία Β, Δ παίρνουμε ημιευθείες Βx και Δy, οι οποίες τέμνονται στο Α,

έτσι ώστε $Δ\hat{Β}x = Β\hat{Δ}y = \dfrac{180^0 - φ}{2} = ω$.

Τέλος φέρνουμε ΔΓ//ΑΒ και ΒΓ//ΑΔ και σχηματίζουμε τον ρόμβο ΑΒΓΔ.

Απόδειξη

Το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο αφού ΑΒ//ΓΔ και ΒΓ//ΑΔ.

Το ΑΒΔ είναι ισοσκελές (αφού $Δ\hat{Β}x = Β\hat{Δ}y = \dfrac{180^0 - φ}{2} = ω$), άρα $ΑΒ = ΑΔ$,

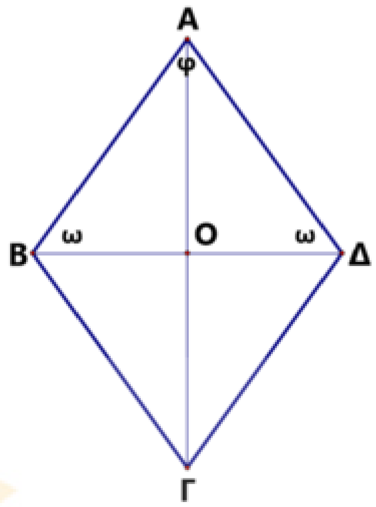
άρα το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ρόμβος.

Είναι $ΒΔ = δ$ από κατασκευή και $Β\hat{Α}Δ = 180^0 - 2ω = 180^0 - 2\cdot\dfrac{180^0 - φ}{2} = φ$.

Διερεύνηση

Για να έχει λύση το πρόβλημά μας θα πρέπει $φ < 180^0$.

2η λύση



Ανάλυση

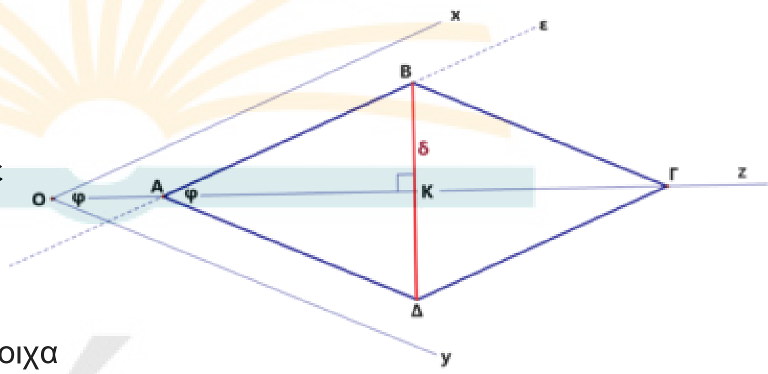
Έστω ΑΒΓΔ ο ζητούμενος ρόμβος στον οποίο γνωρίζουμε τη διαγώνιό του $Β\Delta = \delta$ και τη γωνία $Β\hat{Α}\Delta = \varphi$

Το Α βλέπει τη ΒΔ υπό σταθερή γωνία, άρα βρίσκεται σε τόξο περιφέρειας με χορδή τη ΒΔ.

Επίσης το Α ισαπέχει από τα Β, Δ, άρα βρίσκεται στη μεσοκάθετο του ΒΔ.

Επομένως το τρίγωνο $\overset{\Delta}{ΑΒ\Delta}$ είναι κατασκευάσιμο και αφού ΒΓ//ΑΔ και ΓΔ//ΑΒ, το σημείο Γ ορίζεται επίσης.

Κατασκευή



Σχεδιάζουμε γωνία $x\hat{O}y = \varphi$ και τη διχοτόμο Oz αυτής.

Σε σημείο Κ της Oz φέρνουμε $Β\Delta \perp Oz$ με $ΒΚ = Κ\Delta = \frac{\delta}{2}$.

Από τα Β και Δ φέρνουμε παράλληλες στις Ox, Oy αντίστοιχα οι οποίες τέμνονται στο Α.

Το Γ είναι το συμμετρικό του Α ως προς Κ.

Απόδειξη

Το ΑΒΓΔ είναι ρόμβος αφού οι διαγώνιοί του διχοτομούνται και είναι κάθετες.

Είναι $Β\Delta = \delta$ από κατασκευή και $Β\hat{Α}\Delta = x\hat{O}y = \varphi$.

Διερεύνηση

Για να έχει λύση το πρόβλημά μας θα πρέπει $\varphi < 180^0$.