# ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟΥ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΟΥ 1965
# ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ
# ΤΥΠΟΣ Β΄
# Τρίτη 21 Σεπτεμβρίου 1965

**Ζήτημα 1ο**

**α)** Ἂν ἔχωμεν $\alpha^x = A$, τὸ $x$ καλεῖται λογάριθμος τοῦ Α ὡς πρὸς βάσιν α καὶ σημειώνεται συμβολικῶς $\lambda o\gamma_\alpha A = x$.

Ἔστω ὅτι ζητοῦμεν τὸν λογάριθμον τοῦ Α ὡς πρὸς ἄλλην βάσιν, ἔστω β.

Λαμβάνοντες τοὺς λογαρίθμους ὡς πρὸς β τῶν μελῶν τῆς ἰσότητος $\alpha^x = A$ εὑρίσκομεν $\lambda o\gamma_\beta(\alpha^x) = \lambda o\gamma_\beta A$ ἢ $x\,\lambda o\gamma_\beta \alpha = \lambda o\gamma_\beta A$. θέτοντες ἀντὶ τοῦ $x$ τὸ ἴσον του $\lambda o\gamma_\alpha A$, εὑρίσκομεν $\lambda o\gamma_\alpha A \cdot \lambda o\gamma_\beta \alpha = \lambda o\gamma_\beta A$. Ἤτοι:

Ὅταν γνωρίζωμεν τὸν λογάριθμον ἀριθμοῦ ὡς πρὸς βάσιν α π.χ. καὶ θέλομεν τὸν λογάριθμόν του ὡς πρὸς βάσιν β, πολλαπλασιάζομεν τὸν γνωστὸν λογάριθμον ( ὡς πρὸς βάσιν α ) ἐπὶ τὸν λογάριθμον τῆς βάσεως α ὡς πρὸς τὴν βάσιν β.

**β)** Για να έχει νόημα η παράσταση $\lambda o\gamma x^{2\nu}$ θα πρέπει $x^{2\nu} > 0$.
Αφού $2\nu$ είναι άρτιος, η παράσταση $\lambda o\gamma x^{2\nu}$ έχει νόημα για κάθε πραγματικό αριθμό $x$ διάφορετικό του μηδενός.

$$\lambda o\gamma x^{2\nu} = \lambda o\gamma |x|^{2\nu} = 2\nu \cdot \lambda o\gamma |x|$$

**Ζήτημα 2ο**

$$\sqrt[3]{45 - \sqrt{1682}} = x - \sqrt{y} \Leftrightarrow \sqrt[3]{45 - 29\cdot\sqrt{2}} = x - \sqrt{y} \Rightarrow$$

$$\left(\sqrt[3]{45 - 29\cdot\sqrt{2}}\right)^3 = \left(x - \sqrt{y}\right)^3 \Leftrightarrow 45 - 29\cdot\sqrt{2} = x^3 - 3x^2\sqrt{y} + 3xy - y\sqrt{y} \Leftrightarrow$$

$$45 - 29\cdot\sqrt{2} = (x^3 + 3xy) - (3x^2 + y)\cdot\sqrt{y}$$

Οι $x, y$ είναι ρητοί, άρα οι $x^3 + 3xy$, $3x^2 + y$ είναι επίσης ρητοί, επομένως

$$\begin{cases} x^3 + 3xy = 45 \\ (3x^2 - y)\cdot\sqrt{y} = 29\cdot\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + 3xy = 45 \\ 3x^2 + y = 29 \\ y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + 6x - 45 = 0 \\ x^2 = 9 \\ y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x^3 + 6x - 45 = 0 \\ x = \pm 3 \\ y = 2 \end{cases} \underset{(-3)^3 + 6\cdot(-3) - 45 \neq 0}{\overset{3^3 + 6\cdot 3 - 45 = 0}{\Longrightarrow}} \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$$

Η εξίσωση που δόθηκε στους μαθητές

$$\sqrt[3]{45 - \sqrt{841}} = x - \sqrt{y} \Leftrightarrow \sqrt[3]{45 - 29} = x - \sqrt{y} \Rightarrow \sqrt[3]{16} = x - \sqrt{y} \Rightarrow$$

$$\left(\sqrt[3]{16}\right)^3 = \left(x - \sqrt{y}\right)^3 \Leftrightarrow 16 = x^3 - 3x^2\sqrt{y} + 3xy - y\sqrt{y} \Leftrightarrow$$

$$(3x^2 + y)\cdot\sqrt{y} = x^3 + 3xy - 16 \overset{3x^2 + y > 0}{\Rightarrow} \sqrt{y} = \frac{x^3 + 3xy - 16}{3x^2 + y}$$

ΑΔΥΝΑΤΗ (άρρητος = ρητός)

**Ζήτημα 3ο**

$$\eta < \sqrt{\xi} < \eta + \frac{1}{4\cdot(2\rho + 1)} \overset{\rho + \frac{\xi - \rho^2}{2\rho + 1}}{\Leftrightarrow}$$

$$\rho + \frac{\xi - \rho^2}{2\rho + 1} < \sqrt{\xi} < \rho + \frac{\xi - \rho^2}{2\rho + 1} + \frac{1}{4\cdot(2\rho + 1)} \overset{\cdot 4(2\rho + 1)}{\Leftrightarrow}$$

$$4\rho\cdot(2\rho + 1) + 4\cdot(\xi - \rho^2) < 4\sqrt{\xi}\cdot(2\rho + 1) < 4\rho\cdot(2\rho + 1) + 4\cdot(\xi - \rho^2) + 1 \Leftrightarrow$$

$$4\rho^2 + 4\rho + 4\xi < 4\sqrt{\xi}\cdot(2\rho + 1) < 4\rho^2 + 4\rho + 4\xi + 1$$

- $4\rho^2 + 4\rho + 4\xi < 4\sqrt{\xi}\cdot(2\rho + 1) \Leftrightarrow$

  $\rho^2 + \rho + \xi < \sqrt{\xi}\cdot(2\rho + 1) \Leftrightarrow$

  $\rho^2 + \rho + \xi - 2\rho\sqrt{\xi} - \sqrt{\xi} < 0 \Leftrightarrow$

  $\rho^2 - \rho\sqrt{\xi} + \rho - \rho\sqrt{\xi} + \sqrt{\xi}^2 - \sqrt{\xi} < 0 \Leftrightarrow$

  $\rho\cdot(\rho - \sqrt{\xi} + 1) - \sqrt{\xi}\cdot(\rho - \sqrt{\xi} + 1) < 0 \Leftrightarrow$

  $(\rho - \sqrt{\xi} + 1)\cdot(\rho - \sqrt{\xi}) < 0$

  που ισχύει διότι $\rho < \sqrt{\xi} < \rho + 1$ άρα $\begin{cases} \rho - \sqrt{\xi} + 1 > 0 \\ \rho - \sqrt{\xi} < 0 \end{cases}$

- $4\sqrt{\xi}\cdot(2\rho + 1) < 4\rho^2 + 4\rho + 4\xi + 1 \Leftrightarrow$

  $4\sqrt{\xi}\cdot(2\rho + 1) < (2\rho + 1)^2 + (2\sqrt{\xi})^2 \Leftrightarrow$

  $0 < (2\rho + 1)^2 - 4\sqrt{\xi}\cdot(2\rho + 1) + (2\sqrt{\xi})^2 \Leftrightarrow$

  $0 < (2\rho + 1 - 2\sqrt{\xi})^2$ που ισχύει, διότι $2\rho + 1 - 2\sqrt{\xi} \neq 0$,

  αφού αν $2\rho + 1 - 2\sqrt{\xi} = 0$, τότε $\sqrt{\xi} = \dfrac{2\rho + 1}{2}$ ΑΤΟΠΟ (άρρητος = ρητός)

Επομένως $\rho + \dfrac{\xi - \rho^2}{2\rho + 1} < \sqrt{\xi} < \rho + \dfrac{\xi - \rho^2}{2\rho + 1} + \dfrac{1}{4\cdot(2\rho + 1)}$