ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟΥ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΟΥ 1965
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ (επαναληπτικές)
ΤΥΠΟΣ Β΄
Κυριακή 26 Σεπτεμβρίου 1965

Ζήτημα 1ο

Γεωμετρικὴ πρόοδος καλεῖται διαδοχὴ ἀριθμῶν, ἕκαστος τῶν ὁποίων γίνεται ἐκ τοῦ προηγουμένου του μὲ πολλαπλασιασμὸν ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.

Οἱ μὲν ἀποτελοῦντες τὴν πρόοδον ἀριθμοὶ λέγονται **ὅροι** αὐτῆς, ὁ δὲ ἀριθμός, ἐπὶ τὸν ὁποῖον πολλαπλασιάζεται ὅρος τις, διὰ νὰ δώσῃ τὸν ἑπόμενον αὐτοῦ, λέγεται **λόγος** τῆς προόδου.

Ἐὰν μὲν ὁ λόγος τῆς προόδου **ἀπολύτως** θεωρούμενος εἶναι μεγαλύτερος τῆς 1, οἱ ὅροι **ἀπολύτως** θεωρούμενοι βαίνουν αὐξανόμενοι καὶ ἡ πρόοδος λέγεται (ἀπολύτως) **αὔξουσα,** ἐὰν δὲ ὁ λόγος **ἀπολύτως** θεωρούμενος εἶναι μικρότερος τῆς 1, οἱ ὅροι ἀπολύτως θεωρούμενοι βαίνουν ἐλαττούμενοι (φθίνοντες) καὶ ἡ πρόοδος λέγεται (ἀπολύτως) **φθίνουσα.**

Ἂν μὲ α παραστήσωμεν τὸν πρῶτον ὅρον γεωμετρικῆς τινος προόδου καὶ μὲ ω τὸν λόγον αὐτῆς, ὁ ὅρος ταύτης ὁ ἔχων τὴν β΄ τάξιν θὰ εἶναι αω, ὁ ἔχων τὴν γ΄ τάξιν θὰ παριστάνεται ὑπὸ τοῦ $\alpha\cdot\omega\cdot\omega=\alpha\omega^2$ κ.ο.κ., ὥστε ἡ πρόοδος θὰ παριστάνεται οὕτως :

$$\alpha,\quad \alpha\omega^2,\quad \alpha\omega^3,\quad \alpha\omega^4,\ldots.$$

Το σχολικό βιβλίο δεν όριζε γεωμετρική πρόοδο με $\omega = 1$ (σταθερή γ.π) ή $\omega = -1$ (εναλλασσόμενη γ.π.)

$$\text{Πρέπει}\quad \begin{cases} \alpha\cdot\omega^{3\nu} = \alpha \\ \alpha\cdot\omega^{3\nu+1} = \alpha\cdot\omega \\ \alpha\cdot\omega^{3\nu+2} = \alpha\cdot\omega^2 \end{cases} \underset{\omega\neq 0}{\overset{\alpha\neq 0}{\Rightarrow}} \omega^{3\nu} = 1$$

Για $\nu = 1$ είναι $\omega^3 = 1 \Leftrightarrow \omega^3 - 1 = 0 \Leftrightarrow (\omega - 1)(\omega^2 + \omega + 1) = 0 \Leftrightarrow$

$\omega - 1 = 0$ ή $\omega^2 + \omega + 1 = 0 \Leftrightarrow \omega = 1$ ή $\omega = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ ή $\omega = \dfrac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$.

Αντίστροφα αν $\omega = 1$ ή $\omega = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ ή $\omega = \dfrac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$, τότε $\omega^3 = 1$ και $\omega^{3\nu} = (\omega^3)^\nu = 1^\nu = 1$.

Επομένως $\boxed{\boldsymbol{\omega = 1 \text{ ή } \omega = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2} \text{ ή } \omega = \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}}}$.

Ζήτημα 2ο

- $x^3 \cancel{+y^3} + \alpha\cdot(x^2+y^2) = \cancel{y^3} + z^3 + \alpha\cdot(y^2+z^2) \Leftrightarrow$

$x^3 + \alpha x^2 \cancel{+\alpha y^2} = z^3 \cancel{+\alpha y^2} + \alpha z^2 \Leftrightarrow$

$x^3 - z^3 + \alpha x^2 - \alpha z^2 = 0 \Leftrightarrow$

$(x-z)\cdot(x^2+xz+z^2) + \alpha\cdot(x-z)\cdot(x+z) = 0 \overset{x-z\neq 0}{\Leftrightarrow}$

$x^2 + xz + z^2 + \alpha\cdot(x+z) = 0 \Leftrightarrow$

$x^2 + z^2 + xz + \alpha x + \alpha z = 0 \quad (1)$

- $y^3 + z^3 + \alpha\cdot(y^2+z^2) = y^3 + z^3 + \alpha\cdot(y^2+z^2) \Leftrightarrow$ ... όμοια ...

$y^2 + x^2 + xy + \alpha x + \alpha y = 0 \quad (2)$

(1), (2) $\Rightarrow \cancel{x^2} + z^2 + xz \cancel{+\alpha x} + \alpha z = y^2 \cancel{+x^2} + xy \cancel{+\alpha x} + \alpha y \Leftrightarrow$

$z^2 - y^2 + xz - xy + \alpha z - \alpha y = 0 \Leftrightarrow$

$(z-y)(z+y) + x(z-y) + \alpha(z-y) = 0 \overset{z-y\neq 0}{\Leftrightarrow}$

$z + y + x + \alpha = 0 \quad (3)$

(2) $\Leftrightarrow y^2 + x^2 + 2xy + \alpha x + \alpha y = xy \Leftrightarrow (x+y)^2 + \alpha(x+y) = xy \overset{(3)}{\Leftrightarrow}$

$(-z-\alpha)^2 + \alpha(-z-\alpha) = xy \Leftrightarrow z^2 + 2\alpha z \cancel{+\alpha^2} - \alpha z \cancel{-\alpha^2} = xy \Leftrightarrow$

$0 = xy - z^2 - \alpha z \Leftrightarrow 0 = xy + z(-z-\alpha) \overset{(3)}{\Leftrightarrow}$

$0 = xy + z(x+y) \Leftrightarrow xy + yz + zx = 0 \quad (4)$

$$
\begin{aligned}
x^3 + y^3 + \alpha(x^2+y^2) &= x^3 + \alpha x^2 + y^3 + \alpha y^2 \\
&= x^2(x+\alpha) + y^2(y+\alpha) \\
&\overset{(3)}{=} x^2(-y-z) + y^2(-x-z) \\
&= -x^2y - x^2z - xy^2 - y^2z \\
&= x\cdot(-xy-xz) + y\cdot(-xy-yz) \\
&\overset{(4)}{=} x\cdot yz + y\cdot xz \\
&= 2xyz
\end{aligned}
$$

Ζήτημα 3ο

α) Σχηματίζουμε τον παρακάτω πίνακα :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$x - 2$		$-$		$-$	0	$+$	
$2x - 1$		$-$	0	$+$		$+$	

- Για $x < \frac{1}{2}$: $\varphi(x) = -(x - 2) - (2x - 1) = -x + 2 - 2x + 1 = -3x + 3$
- Για $\frac{1}{2} < x < 2$: $\varphi(x) = -(x - 2) + (2x - 1) = -x + 2 + 2x - 1 = x + 1$
- Για $x > 2$: $\varphi(x) = x - 2 + 2x - 1 = 3x - 3$
- Για $x = \frac{1}{2}$: $\varphi\left(\frac{1}{2}\right) = \left|\frac{1}{2} - 2\right| + \left|2\frac{1}{2} - 1\right| = \left|-\frac{3}{2}\right| + |0| = \frac{3}{2}$
- Για $x = 2$: $\varphi(2) = |2 - 2| + |2 \cdot 2 - 1| = |0| + |3| = 3$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$\varphi(x)$		$\searrow$	$\frac{3}{2}$	$\nearrow$	3	$\nearrow$	

Από τον πίνακα μεταβολών της φ προκύπτει ότι η φ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x = \frac{1}{2}$ την τιμή $\frac{3}{2}$, δηλαδή $\varphi(x) \geq \frac{3}{2}$ για κάθε x πραγματικό αριθμό.

β) $x_1 + x_2 = 2 \Rightarrow x_1 = 2 - x_2$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 \geq 2 : \ \varphi(x_1) = 3x_1 - 3 = 3\cdot(2 - x_2) - 3 = -3x_2 + 3 \\ x_1 \geq 2 \Rightarrow 2 - x_2 \geq 2 \Leftrightarrow x_2 \leq 0 : \ \varphi(x_2) = -3x_2 + 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \varphi(x_1) = \varphi(x_2)$$

γ) $$\varphi(x) = \begin{cases} -3x + 3, & x < \frac{1}{2} \\ x + 1, & \frac{1}{2} \leq x \leq 2 \\ 3x - 3, & x > 2 \end{cases}$$

x	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3
$\varphi(x)$	6	3	$\frac{3}{2}$	2	3	6