

# ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟΥ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΟΥ 1965

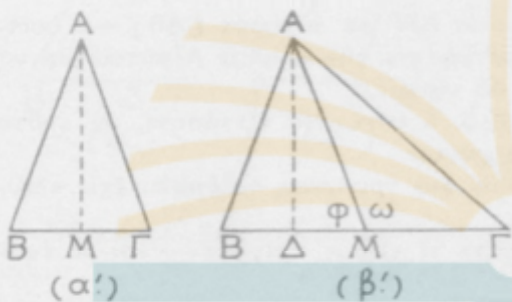
## ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

### ΤΥΠΟΣ Β'

Πέμπτη 23 Σεπτεμβρίου 1965

#### Ζήτημα 1°

Αν  $AM$  είναι διάμεσος τριγώνου  $AB\Gamma$  θά είναι:  
 $(AB)^2 + (A\Gamma)^2 = 2(AM)^2 + 2(BM)^2$



Τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων δύο πλευρῶν τριγώνου εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ἄθροισμα τοῦ διπλασίου τετραγώνου τῆς μεταξὺ αὐτῶν διαμέσου καὶ τοῦ διπλασίου τετραγώνου τοῦ ἡμίσεος τῆς τρίτης πλευρᾶς.

Αν  $M$  εἶναι τὸ μέσον τῆς πλευρᾶς  $B\Gamma$  τριγώνου  $AB\Gamma$ ,  $A\Delta$  κάθετος ἐπὶ τὴν  $B\Gamma$  καὶ  $A\Gamma > AB$ , θά είναι:

$$(A\Gamma)^2 - (AB)^2 = 2(B\Gamma)(\Delta M)$$

Ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων δύο πλευρῶν τριγώνου εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς δύο ὀρθογώνια, ἔχοντα βάσιν μὲν τὴν  $\gamma'$  πλευρὰν, ὕψος δὲ τὴν ἐπ' αὐτὴν προβολὴν τῆς πρὸς αὐτὴν ἀντιστοίχου διαμέσου.

#### Ζήτημα 2°

Ἐστω  $AB\Gamma\Delta A'B'\Gamma'\Delta'$  παραλληλεπίπεδο

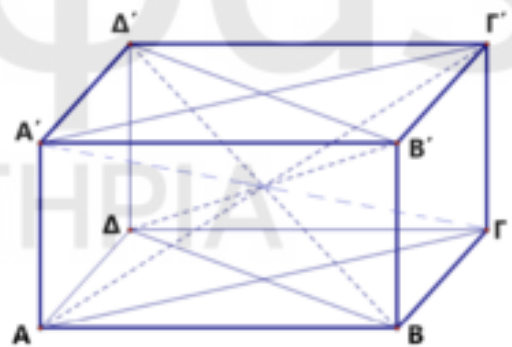
που οι διαγώνιοί του  $A\Gamma'$ ,  $A'\Gamma$ ,  $B\Delta'$ ,  $B'\Delta$  είναι ίσες.

Το παραλληλόγραμμο  $A\Gamma\Gamma'A'$  είναι ορθογώνιο διότι οι διαγώνιοί του είναι ίσες, άρα  $AA' \perp A\Gamma$  (1)

Το παραλληλόγραμμο  $B\Delta\Delta'B'$  είναι ορθογώνιο διότι οι διαγώνιοί του είναι ίσες, άρα  $BB' \perp B\Delta$  (2)

(1), (2)  $\stackrel{AA' // BB'}{\Rightarrow}$  η  $AA'$  είναι ορθογώνιος προς τη  $B\Delta$  (3)

(1), (3)  $\Rightarrow$  η  $AA'$  είναι κάθετη στην έδρα  $AB\Gamma\Delta$



Όμοια δείχνουμε ότι κάθε ακμή είναι κάθετη στις έδρες του παραλληλεπιπέδου, άρα το  $AB\Gamma\Delta A'B'\Gamma'\Delta'$  είναι ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο.

### Ζήτημα 3<sup>ο</sup>

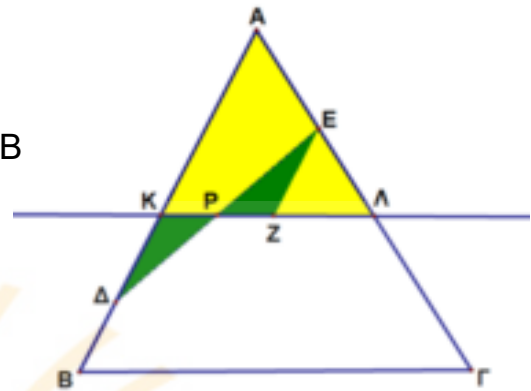
Έστω  $KPL$  μια τυχαία τέμνουσα.

Έστω επίσης  $KP < PL$ <sup>(1)</sup>

$Z$  είναι το συμμετρικό του  $K$  ως προς  $P$ .

Από το  $Z$  φέρνουμε ευθεία παράλληλη στην  $AB$  η οποία τέμνει την  $AG$  στο  $E$ .

Τα τρίγωνα  $\hat{\Delta}KP\hat{\Delta}$ ,  $\hat{\Delta}ZP\hat{\Delta}$  είναι ίσα διότι έχουν  $KP = PZ$ ,  $\hat{\Delta}KP = P\hat{\Delta}ZE$  και  $K\hat{P}\hat{\Delta} = Z\hat{P}\hat{E}$ , άρα  $KP\hat{\Delta} = (EZP)$ .



$$\begin{aligned}(AKL) &= (AKPE) + (EZP) + (EZL) \\ &= (AKPE) + (PK\hat{\Delta}) + (EZL) \\ &= (A\hat{\Delta}E) + (EZL)\end{aligned}$$

Είναι  $(AKL) \geq (A\hat{\Delta}E)$

Το "=" ισχύει όταν  $E \equiv L \equiv Z$ , δηλαδή  $P$  μέσο του  $KL$ <sup>(1)</sup>.

Επομένως η  $\Delta PE$  είναι η τέμνουσα  $\tau$  ώστε το εμβαδόν  $E_1$  να είναι ελάχιστο.

### Κατασκευή

#### 1<sup>ος</sup> τρόπος

Παίρνουμε  $K$  τυχαίο σημείο της  $AB$ .

$Z$  το συμμετρικό του  $K$  ως προς  $P$ .

Από το  $Z$  φέρνουμε ευθεία παράλληλη στην  $AB$  η οποία τέμνει την  $AG$  στο  $E$ .

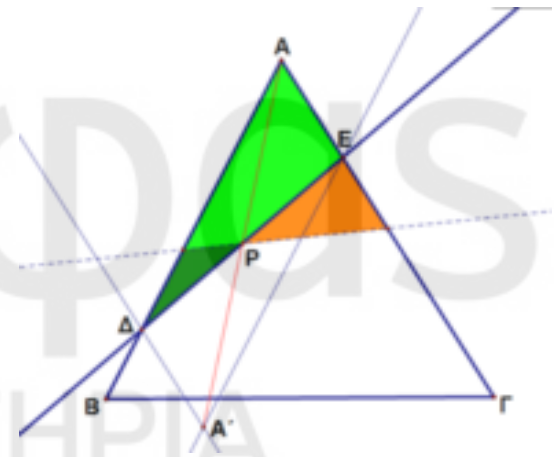
Η ζητούμενη τέμνουσα  $\tau$  είναι η ευθεία  $PE$ .

#### 2<sup>ος</sup> τρόπος

$A'$  το συμμετρικό του  $A$  ως προς  $P$ .

Από το  $A'$  φέρνουμε παράλληλες στις  $AB$ ,  $AG$  η οποίες τέμνουν τις  $AG$ ,  $AB$  στα  $E$  και  $A$  αντίστοιχα.

Η ζητούμενη τέμνουσα  $\tau$  είναι η ευθεία  $\Delta E$ .



### Διερεύνηση

Για να έχει λύση το πρόβλημα θα πρέπει τα  $\Delta$ ,  $E$  να είναι εσωτερικά σημεία των  $AB$  και  $AG$ .