ΕΙΣΙΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 1964

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
(Άλγεβρα – Γεωμετρία – Τριγωνομετρία)

ΟΜΑΔΑ Β΄

Παρασκευή 25 Σεπτεμβρίου 1964 (πρωί)

ΑΛΓΕΒΡΑ

Ζήτημα 1ο

Υποθέτουμε ότι $A \neq 0$ και $\alpha \neq 0$ ώστε τα πολυώνυμα είναι δευτέρου βαθμού.
Για να διαιρείται το $Ax^2 + Bx + \Gamma$ με το $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$
πρέπει να υπάρχει αριθμός $\lambda \neq 0$
ώστε $Ax^2 + Bx + \Gamma = \lambda \cdot (\alpha x^2 + \beta x + \gamma) \Leftrightarrow$
$Ax^2 + Bx + \Gamma = \lambda\alpha x^2 + \lambda\beta x + \lambda\gamma \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} A = \lambda\alpha \\ B = \lambda\beta \\ \Gamma = \lambda\gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{A}{\alpha} = \lambda \\ \dfrac{B}{\beta} = \lambda \\ \dfrac{\Gamma}{\gamma} = \lambda \end{cases} \Rightarrow \frac{A}{\alpha} = \frac{B}{\beta} = \frac{\Gamma}{\gamma} = \lambda$$

Αντίστροφα αν $\dfrac{A}{\alpha} = \dfrac{B}{\beta} = \dfrac{\Gamma}{\gamma} = \lambda \Rightarrow \begin{cases} A = \lambda\alpha \\ B = \lambda\beta \\ \Gamma = \lambda\gamma \end{cases}$

$Ax^2 + Bx + \Gamma = \lambda\alpha x^2 + \lambda\beta x + \lambda\gamma = \lambda \cdot (\alpha x^2 + \beta x + \gamma)$

Επομένως ικανή και αναγκαία συνθήκη
για να διαιρείται το πολυώνυμο $Ax^2 + Bx + \Gamma$ ακριβώς με το πολυώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$
είναι η $\boldsymbol{\dfrac{A}{\alpha} = \dfrac{B}{\beta} = \dfrac{\Gamma}{\gamma}}$.

Ζήτημα 2ο

- Αν θεωρήσουμε ότι $0^{\alpha} = 0$ για κάθε $\alpha > 0$, τότε προφανής λύση είναι η $x = y = 0$.

- Αν θεωρήσουμε ότι η δύναμη 0^{α} με $\alpha > 0$, ορίζεται μόνο αν α είναι θετικός ρητός, τότε οι εκθέτες $\lambda o\gamma 5$ και $\lambda o\gamma 3$ είναι άρρητοι, άρα οι βάσεις πρέπει να είναι θετικές, δηλαδή πρέπει $x > 0$ και $y > 0$.

$$x^{\lambda o\gamma 5} = y^{\lambda o\gamma 3} \Rightarrow \lambda o\gamma x^{\lambda o\gamma 5} = \lambda o\gamma y^{\lambda o\gamma 3} \Rightarrow$$
$$\lambda o\gamma 5 \cdot \lambda o\gamma x = \lambda o\gamma 3 \cdot \lambda o\gamma y \Rightarrow$$
$$\lambda o\gamma y = \frac{\lambda o\gamma 5 \cdot \lambda o\gamma x}{\lambda o\gamma 3} \quad (1)$$

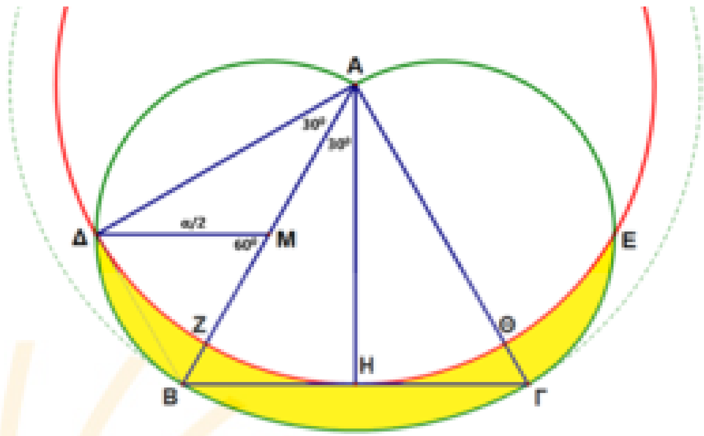
$$(3x)^{\lambda o\gamma 3} = (5y)^{\lambda o\gamma 5} \Rightarrow$$
$$\lambda o\gamma (3x)^{\lambda o\gamma 3} = \lambda o\gamma (5y)^{\lambda o\gamma 5} \Rightarrow$$
$$\lambda o\gamma 3 \cdot \lambda o\gamma (3x) = \lambda o\gamma 5 \cdot \lambda o\gamma (5y) \Rightarrow$$
$$\lambda o\gamma 3 \cdot (\lambda o\gamma 3 + \lambda o\gamma x) = \lambda o\gamma 5 \cdot (\lambda o\gamma 5 + \lambda o\gamma y) \Rightarrow$$
$$\lambda o\gamma^2 3 + \lambda o\gamma 3 \cdot \lambda o\gamma x = \lambda o\gamma^2 5 + \lambda o\gamma 5 \cdot \lambda o\gamma y \overset{(1)}{\Rightarrow}$$
$$\lambda o\gamma^2 3 + \lambda o\gamma 3 \cdot \lambda o\gamma x = \lambda o\gamma^2 5 + \lambda o\gamma 5 \cdot \frac{\lambda o\gamma 5 \cdot \lambda o\gamma x}{\lambda o\gamma 3} \overset{\cdot \lambda o\gamma 3}{\Rightarrow}$$
$$\lambda o\gamma^3 3 + \lambda o\gamma^2 3 \cdot \lambda o\gamma x = \lambda o\gamma^2 5 \cdot \lambda o\gamma 3 + \lambda o\gamma^2 5 \cdot \lambda o\gamma x \Rightarrow$$
$$\lambda o\gamma^2 3 \cdot \lambda o\gamma x - \lambda o\gamma^2 5 \cdot \lambda o\gamma x + \lambda o\gamma^3 3 - \lambda o\gamma^2 5 \cdot \lambda o\gamma 3 = 0 \Rightarrow$$
$$(\lambda o\gamma^2 3 - \lambda o\gamma^2 5) \cdot \lambda o\gamma x + \lambda o\gamma 3 \cdot (\lambda o\gamma^2 3 - \lambda o\gamma^2 5) = 0 \Rightarrow$$
$$(\lambda o\gamma^2 3 - \lambda o\gamma^2 5) \cdot (\lambda o\gamma x + \lambda o\gamma 3) = 0 \overset{\lambda o\gamma^2 3 - \lambda o\gamma^2 5 \neq 0}{\Rightarrow}$$
$$\lambda o\gamma x + \lambda o\gamma 3 = 0 \Rightarrow$$
$$\lambda o\gamma 3x = 0 \Rightarrow 3x = 1 \Leftrightarrow \mathbf{x = \frac{1}{3}}$$

$$(1) \overset{x = \frac{1}{3}}{\Rightarrow} \lambda o\gamma y = \frac{\lambda o\gamma 5 \cdot \lambda o\gamma \frac{1}{3}}{\lambda o\gamma 3} \Rightarrow \lambda o\gamma y = \frac{-\lambda o\gamma 5 \cdot \lambda o\gamma 3}{\lambda o\gamma 3} \Rightarrow$$
$$\lambda o\gamma y = -\lambda o\gamma 5 \Rightarrow \lambda o\gamma y = \lambda o\gamma 5^{-1} \Rightarrow \lambda o\gamma y = \lambda o\gamma \frac{1}{5} \Rightarrow \mathbf{y = \frac{1}{5}}$$

Επομένως $\mathbf{x = \frac{1}{3}}$ και $\mathbf{y = \frac{1}{5}}$.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Ζήτημα 3ο



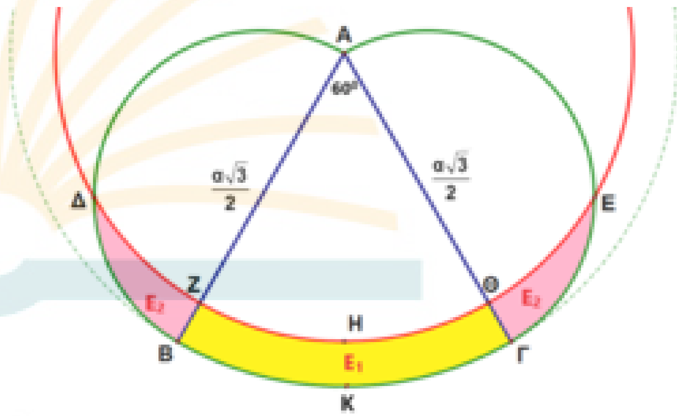
$E_1 = E_{\text{κυκλ.τομ.}A\widehat{B\Gamma}} - E_{\text{κυκλ.τομ.}A\widehat{Z\Theta}}$

$$= \frac{\pi\alpha^2 \cdot 60^0}{360^0} - \frac{\pi\left(\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}\right)^2 \cdot 60^0}{360^0}$$

$$= \frac{\pi\alpha^2}{6} - \frac{\pi\frac{3\alpha^2}{4}}{6}$$

$$= \frac{\pi\alpha^2}{6} - \frac{\pi\alpha^2}{8}$$

$$= \frac{\pi\alpha^2}{24} \quad (1)$$



$A\overset{\Delta}{H}B = A\overset{\Delta}{\Delta}B$, διότι είναι ορθογώνια

έχουν AB κοινή και $AH = A\Delta = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$.

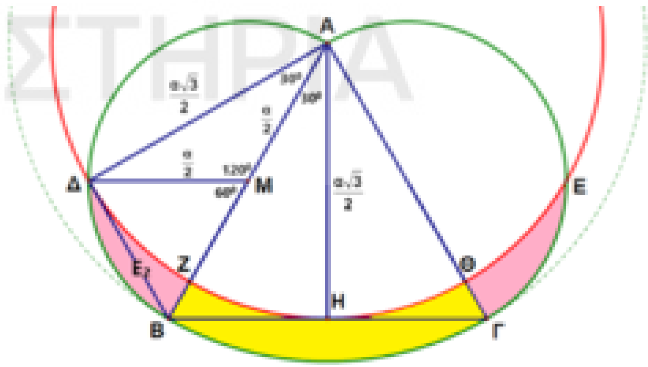
Άρα $\Delta\hat{A}B = B\hat{A}H = 30^0$ και $\Delta\hat{M}B = 60^0$.

$E_2 = E_{\text{κυκλ.τομ.}M\widehat{\Delta B}} + (A\Delta M) - E_{\text{κυκλ.τομ.}A\widehat{\Delta Z}}$

$$= \frac{\pi\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 \cdot 60^0}{360^0} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{\alpha}{2}\cdot\eta\mu 120^0 - \frac{\pi\left(\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}\right)^2 \cdot 30^0}{360^0}$$

$$= \frac{\pi\alpha^2}{24} + \frac{\alpha^2}{8}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi\alpha^2}{16}$$

$$= \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{16} - \frac{\pi\alpha^2}{48} \quad (2)$$



$E = E_1 + 2E_2$

$$\overset{(1)}{\underset{(2)}{=}} \frac{\pi\alpha^2}{24} + 2\left(\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{16} - \frac{\pi\alpha^2}{48}\right)$$

$$= \frac{\pi\alpha^2}{24} + \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{8} - \frac{\pi\alpha^2}{24}$$

$$= \boxed{\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{8}}$$

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

Ζήτημα 4ο

α) Αν $\varphi_1 = \text{τοξ}_0\text{εφ}\dfrac{1}{7} \;\Rightarrow\; \text{εφ}\varphi_1 = \dfrac{1}{7}$, με $-\dfrac{\pi}{2} < \varphi_1 < \dfrac{\pi}{2}$.

$$0 < \frac{1}{7} < \frac{\sqrt{3}}{3} \;\Rightarrow\; \text{εφ}0 < \text{εφ}\varphi_1 < \text{εφ}\frac{\pi}{6} \;\underset{\text{στο}\left(0,\frac{\pi}{2}\right)}{\overset{\text{εφx}\uparrow}{\Leftrightarrow}}\; 0 < \varphi_1 < \frac{\pi}{6} \quad (1)$$

Αν $\varphi_2 = \text{τοξ}_0\text{εφ}\dfrac{1}{3} \;\Rightarrow\; \text{εφ}\varphi_2 = \dfrac{1}{3}$, με $-\dfrac{\pi}{2} < \varphi_2 < \dfrac{\pi}{2}$.

$$0 < \frac{1}{3} < \frac{\sqrt{3}}{3} \;\Rightarrow\; \text{εφ}0 < \text{εφ}\varphi_2 < \text{εφ}\frac{\pi}{6} \;\underset{\text{στο}\left(0,\frac{\pi}{2}\right)}{\overset{\text{εφx}\uparrow}{\Leftrightarrow}}\; 0 < \varphi_2 < \frac{\pi}{6} \;\Rightarrow\; 0 < 2\varphi_2 < \frac{\pi}{3} \quad (2)$$

$$(1), (2) \overset{(+)}{\Rightarrow} 0 < \varphi_1 + 2\varphi_2 < \frac{\pi}{2} \quad (3)$$

$$\text{εφ}2\varphi_2 = \frac{2\cdot\text{εφ}\varphi_2}{1-\text{εφ}^2\varphi_2} = \frac{2\cdot\frac{1}{3}}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{9}} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{8}{9}} = \frac{3}{4}$$

$$\text{εφ}(\varphi_1 + 2\varphi_2) = \frac{\text{εφ}\varphi_1 + \text{εφ}2\varphi_2}{1-\text{εφ}\varphi_1\cdot\text{εφ}2\varphi_2} = \frac{\frac{1}{7}+\frac{3}{4}}{1-\frac{1}{7}\cdot\frac{3}{4}} = \frac{\frac{4}{28}+\frac{21}{28}}{1-\frac{3}{28}} = \frac{\frac{25}{28}}{\frac{25}{28}} = 1$$

Είναι $\text{εφ}(\varphi_1 + 2\varphi_2) = \text{εφ}\dfrac{\pi}{4}$ και $\dfrac{\pi}{4},\ \varphi_1 + 2\varphi_2 \in \left(0\,,\,\dfrac{\pi}{2}\right)$,

άρα $\varphi_1 + 2\varphi_2 = \dfrac{\pi}{4} \;\Leftrightarrow\; \boxed{\textbf{τοξ}_0\textbf{εφ}\frac{1}{7} + 2\textbf{τοξ}_0\textbf{εφ}\frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}}$

β) $\text{εφ}\alpha = \text{εφ}\beta \;\Leftrightarrow\; \alpha = \kappa\pi + \beta$, κ = ακέραιος.

Για να είναι $\alpha = \beta$ θα πρέπει να δείξουμε ότι $\kappa = 0$,

δηλαδή αρκεί να δείξουμε ότι $|\alpha - \beta| < \pi$.