ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟΥ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΟΥ 1965

Θέματα Τριγωνομετρίας

ΤΥΠΟΣ Β΄

Τετάρτη 22 Σεπτεμβρίου 1965

Ζήτημα 1ο

α΄) $$\eta\mu(\alpha+\beta) = \eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\beta + \eta\mu\beta\,\sigma\upsilon\nu\alpha$$
$$\eta\mu(\alpha-\beta) = \eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\beta - \eta\mu\beta\,\sigma\upsilon\nu\alpha$$

Ἂν ἀφαιρέσωμεν κατὰ μέλη τὰς ἰσότητας, εὑρίσκομεν ὅτι :
$$\eta\mu(\alpha+\beta) - \eta\mu(\alpha-\beta) = 2\eta\mu\beta\,\sigma\upsilon\nu\alpha$$

Τώρα θέτομεν $\alpha+\beta = \mathrm{A}$, $\alpha-\beta = \mathrm{B}$ καὶ εὑρίσκομεν εὐκόλως ὅτι $\alpha = \frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{2}$ καὶ $\beta = \frac{\mathrm{A}-\mathrm{B}}{2}$.

Ἡ προηγουμένη λοιπὸν ἰσότης γίνεται :
$$\eta\mu\mathrm{A} - \eta\mu\mathrm{B} = 2\eta\mu\left(\frac{\mathrm{A}-\mathrm{B}}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{2}\right) \quad (1)$$

Ταύτης τὸ β΄ μέλος εἶναι λογιστὸν διὰ τῶν λογαρίθμων.

β΄) Παρατηροῦμεν ὅτι $\sigma\upsilon\nu\mathrm{B} = \eta\mu(90^\circ - \mathrm{B})$ καὶ ἐφαρμόζομεν τὸν τύπο (1). Οὕτω δὲ εὑρίσκομεν ὅτι :
$$\eta\mu\mathrm{A} - \sigma\upsilon\nu\mathrm{B} = 2\eta\mu\left(\frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{2} - 45^\circ\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\mathrm{A}-\mathrm{B}}{2} + 45^\circ\right)$$

Ζήτημα 2ο

$\sigma\upsilon\nu\mathrm{B} > 0$, άρα $\hat{\mathrm{B}} < 90^0$

$$\eta\mu\mathrm{B} = \sqrt{1 - \sigma\upsilon\nu^2\mathrm{B}} = \sqrt{1 - \left(\frac{12}{13}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{144}{169}} = \sqrt{\frac{25}{169}} = \frac{5}{13}$$

- Αν $\mathrm{A} < 90^0$, τότε $\sigma\upsilon\nu\mathrm{A} > 0$

$$\sigma\upsilon\nu\mathrm{A} = \sqrt{1 - \eta\mu^2\mathrm{A}} = \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$$

$$\eta\mu\Gamma = \eta\mu(\mathrm{A}+\mathrm{B}) = \eta\mu\mathrm{A}\cdot\sigma\upsilon\nu\mathrm{B} + \eta\mu\mathrm{B}\cdot\sigma\upsilon\nu\mathrm{A} = \frac{4}{5}\cdot\frac{12}{13} + \frac{3}{5}\cdot\frac{5}{13} = \frac{48}{65} + \frac{15}{65} = \frac{63}{65}$$

$$\frac{\alpha}{\eta\mu\mathrm{A}} = \frac{\gamma}{\eta\mu\Gamma} \Rightarrow \frac{\alpha}{\frac{4}{5}} = \frac{39}{\frac{63}{65}} \Leftrightarrow \frac{5\alpha}{4} = \frac{39\cdot 65}{63} \Leftrightarrow \alpha = \frac{4\cdot 39\cdot 65}{5\cdot 63} \Leftrightarrow \boxed{\alpha = 32{,}19\mu.}$$

$$\mathrm{E} = \frac{1}{2}\alpha\cdot\gamma\cdot\eta\mu\mathrm{B} \Rightarrow \mathrm{E} = \frac{1}{2}\cdot 32{,}19\cdot 39\cdot\frac{5}{13} \Rightarrow \boxed{\mathrm{E} = 241{,}425\ \mu^2}$$

• Αν $A > 90^0$, τότε $συνA < 0$

Θα πρέπει $180^0 - A > B \Leftrightarrow ημA > ημB \Leftrightarrow \frac{4}{5} > \frac{5}{13}$ που ισχύει

$$συνA = -\sqrt{1 - ημ^2A} = -\sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = -\sqrt{1 - \frac{16}{25}} = -\sqrt{\frac{9}{25}} = -\frac{3}{5}$$

$$ημΓ = ημ(A + B) = ημA \cdot συνB + ημB \cdot συνA = \frac{4}{5} \cdot \frac{12}{13} + \left(-\frac{3}{5}\right) \cdot \frac{5}{13} = \frac{48}{65} - \frac{15}{65} = \frac{33}{65}$$

$$\frac{α}{ημA} = \frac{γ}{ημΓ} \Rightarrow \frac{α}{\frac{4}{5}} = \frac{39}{\frac{33}{65}} \Leftrightarrow \frac{5α}{4} = \frac{39 \cdot 65}{33} \Leftrightarrow α = \frac{4 \cdot 39 \cdot 65}{5 \cdot 33} \Leftrightarrow \boxed{\mathbf{α = 61,45μ.}}$$

$$E = \frac{1}{2}α \cdot γ \cdot ημB \Rightarrow E = \frac{1}{2} \cdot 61,45 \cdot 39 \cdot \frac{5}{13} \Rightarrow \boxed{\mathbf{E = 460,9\ μ^2}}$$

Ζήτημα 3ο

Είναι $β < α$ και έστω x_0 λύση της εξίσωσης, άρα

$$γ \cdot ημ^2x_0 - β \cdot ημx_0 + α = 0 \Leftrightarrow γ \cdot ημ^2x_0 = β \cdot ημx_0 - α \quad (1)$$

Είναι $β \cdot ημx_0 \leq |β \cdot ημx_0| \leq |β| = β < α \Rightarrow β \cdot ημx_0 - α < 0 \overset{(1)}{\Rightarrow}$

$γ \cdot ημ^2x_0 < 0$ που είναι άτοπο, διότι $γ > 0$ και $ημ^2x_0 \geq 0$.

Επομένως η εξίσωση $γ \cdot ημ^2x - β \cdot ημx + α = 0$ δεν έχει λύση.