

**ΕΙΣΙΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 1964**  
**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ**  
**ΟΜΑΔΑ Γ'**  
**Πέμπτη 17 Σεπτεμβρίου 1964 (πρωί)**

**Ζήτημα 1°**

Έστω  $\left| \frac{\alpha}{\beta} \right| = \omega > 0$

$$\left| \frac{\alpha}{\beta} \right| - \left| \frac{\beta}{\alpha} \right| < \frac{15}{4} \Rightarrow \omega - \frac{1}{\omega} < \frac{15}{4} \Rightarrow 4\omega^2 - 4 < 15\omega \Leftrightarrow 4\omega^2 - 15\omega - 4 < 0 \Leftrightarrow$$

$$4 \cdot (\omega - 4) \cdot \left( \omega + \frac{1}{4} \right) < 0 \stackrel{\omega + \frac{1}{4} > 0}{\Rightarrow} \omega - 4 < 0 \Leftrightarrow \omega < 4 \Leftrightarrow \left| \frac{\alpha}{\beta} \right| < 4$$

$$\left| \frac{5\alpha + 16\beta}{4\alpha + 20\beta} \right| < 1 \Leftrightarrow \left| \frac{5\alpha + 16\beta}{4\alpha + 20\beta} \right| < 1 \Rightarrow |5\alpha + 16\beta| < |4\alpha + 20\beta| \Leftrightarrow$$

$$|5\alpha + 16\beta|^2 < |4\alpha + 20\beta|^2 \Leftrightarrow (5\alpha + 16\beta)^2 < (4\alpha + 20\beta)^2 \Leftrightarrow$$

$$25\alpha^2 + 160\alpha\beta + 256\beta^2 < 16\alpha^2 + 160\alpha\beta + 400\beta^2 \Leftrightarrow$$

$$25\alpha^2 - 16\alpha^2 < 400\beta^2 - 256\beta^2 \Leftrightarrow 9\alpha^2 < 144\beta^2 \Leftrightarrow \frac{\alpha^2}{\beta^2} < 16 \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{\frac{\alpha^2}{\beta^2}} < \sqrt{16} \Leftrightarrow \left| \frac{\alpha}{\beta} \right| < 4 \text{ που ισχύει}$$

**Ζήτημα 2°**

$$\begin{cases} x + y + \omega = 0 & (1) \\ x^3 + y^3 + \omega^3 = 3xy\omega & (2) \\ y\omega + \omega x + xy = \alpha^2 & (3) \end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow (x + y + \omega)^2 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + \omega^2 + 2(xy + y\omega + \omega x) = 0 \stackrel{(3)}{\Rightarrow}$$

$$x^2 + y^2 + \omega^2 + 2\alpha^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + \omega^2 = -2\alpha^2 \quad (4)$$

**α)** Αν  $\alpha \neq 0$ , τότε  $x^2 + y^2 + \omega^2 \geq 0$  και  $-2\alpha^2 < 0$ , άρα η (4) είναι αδύνατη, άρα το σύστημα δεν έχει πραγματικές λύσεις.

**β)** Αν  $\alpha = 0$ , τότε: (4)  $\Rightarrow x^2 + y^2 + \omega^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = \omega = 0$ .

*Σημείωση: Η εξίσωση (2) δεν χρησιμοποιήθηκε αφού προκύπτει από την (1).*

### Ζήτημα 3°

$$\alpha) \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt[3]{y} = 8 \\ \sqrt{x^3} + \sqrt[3]{y^3} = 152 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt[3]{y} = 8 \\ (\sqrt{x})^3 + (\sqrt[3]{y})^3 = 152 \end{cases} \begin{matrix} \sqrt{x} = \omega \\ \sqrt[3]{y} = \varphi \end{matrix} \begin{cases} \omega + \varphi = 8 \\ \omega^3 + \varphi^3 = 152 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \omega + \varphi = 8 \\ (\omega + \varphi)^3 - 3\omega\varphi(\omega + \varphi) = 152 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \omega + \varphi = 8 \\ 8^3 - 3\omega\varphi \cdot 8 = 152 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \omega + \varphi = 8 \\ \omega\varphi = 15 \end{cases}$$

Τα  $\omega$  και  $\varphi$  είναι λύσεις της δευτεροβάθμιας εξίσωσης  $z^2 - 8z + 15 = 0$

$$\text{με } \Delta = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 15 = 64 - 60 = 4 \quad \text{και} \quad z = \frac{8 \pm 2}{2} = \begin{cases} 5 \\ 3 \end{cases}$$

$$\text{Το σύστημα γίνεται: } \begin{cases} \omega = 5 \\ \varphi = 3 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} \omega = 3 \\ \varphi = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = 5 \\ \sqrt[3]{y} = 3 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} \sqrt{x} = 3 \\ \sqrt[3]{y} = 5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = 5^2 \\ y = 3^7 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x = 3^2 \\ y = 5^7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 25 \\ y = 2187 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x = 9 \\ y = 78125 \end{cases}$$

### β) 1<sup>η</sup> λύση

Το  $\varphi(x)$  διαιρείται ακριβώς διά  $(x - 3) \Leftrightarrow \varphi(3) = 0 \Leftrightarrow$

$$3^2 - (\lambda - 1) \cdot 3 + \lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow 9 - 3\lambda + 3 + \lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow -2\lambda = -10 \Leftrightarrow \lambda = 5$$

Πράγματι για  $\lambda = 5$  είναι:  $\varphi(x) = x^2 - 4x + 3 = (x - 3)(x - 1)$

Η  $\varphi$  παρουσιάζει ελάχιστο για  $x = \frac{-\beta}{2\alpha} = 2$  την τιμή  $\varphi(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = -1$

### 2<sup>η</sup> λύση

Το  $\varphi(x)$  για  $x = 2$  δίνει  $-1 \Leftrightarrow \varphi(2) = -1 \Leftrightarrow$

$$2^2 - (\lambda - 1) \cdot 2 + \lambda - 2 = -1 \Leftrightarrow 4 - 2\lambda + 2 + \lambda - 2 = -1 \Leftrightarrow -\lambda = -5 \Leftrightarrow \lambda = 5$$

Πράγματι για  $\lambda = 5$  είναι:  $\varphi(x) = x^2 - 4x + 3 = (x - 3)(x - 1)$

Η  $\varphi$  παρουσιάζει ελάχιστο για  $x = \frac{-\beta}{2\alpha} = 2$  την τιμή  $\varphi(2) = -1$

### 3<sup>η</sup> λύση

Το  $\varphi(x)$  για  $x = 2$  δίνει ελάχιστο  $\Rightarrow \frac{-\beta}{2\alpha} = 2 \Leftrightarrow \frac{\lambda - 1}{2} = 2 \Leftrightarrow \lambda = 5$

Πράγματι για  $\lambda = 5$  είναι:  $\varphi(x) = x^2 - 4x + 3 = (x - 3)(x - 1)$

Η  $\varphi$  παρουσιάζει ελάχιστο για  $x = 2$  την τιμή  $\varphi(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = -1$