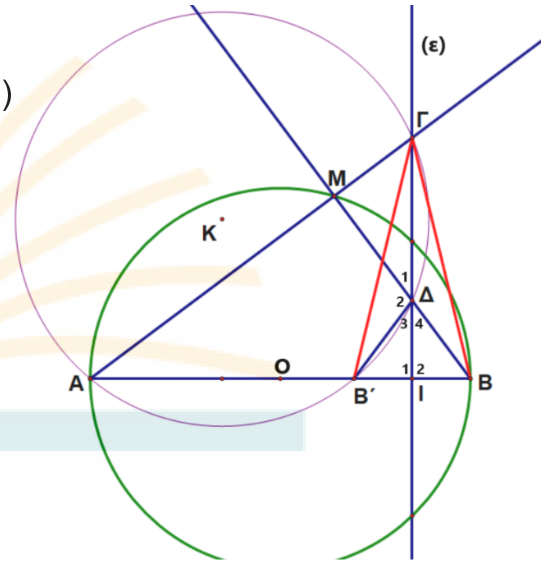
ΕΙΣΙΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 1964

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΟΜΑΔΑ Γ΄

Σάββατο 19 Σεπτεμβρίου 1964 (πρωί)

Ζήτημα 1ο



α) Τα $\overset{\Delta}{\text{ΙΑΓ}}$ και $\overset{\Delta}{\text{ΙΔΒ}}$ είναι όμοια διότι έχουν

$\hat{I}_1 = \hat{I}_1 = 90^0$ και $\hat{A} = \hat{\Delta}_4$ (συμπληρωματικές της $\hat{B}$)

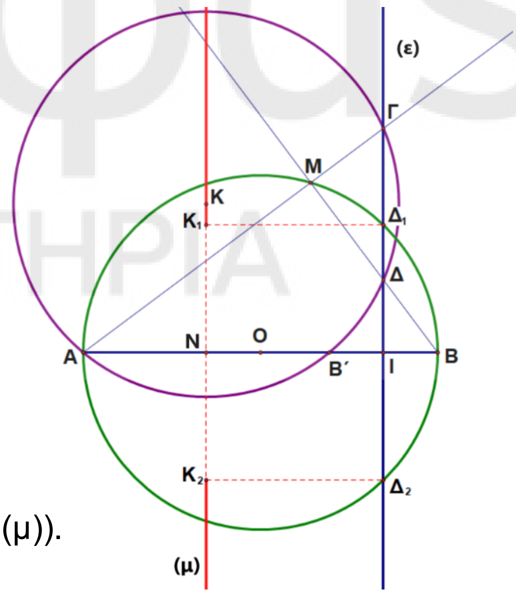
άρα $\dfrac{(\text{ΙΑ})}{(\text{ΙΔ})} = \dfrac{(\text{ΙΓ})}{(\text{ΙΒ})} \Leftrightarrow (\text{ΙΑ})\cdot(\text{ΙΒ}) = (\text{ΙΓ})\cdot(\text{ΙΔ})$

β) Το τετράπλευρο ΑΒ΄ΔΓ είναι εγγεγραμμένο στον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου $\overset{\Delta}{\text{ΑΓΔ}}$, άρα

$$\left.\begin{aligned}\hat{A} + \hat{\Delta}_{1,2} &= 180^0\\ \hat{\Delta}_3 + \hat{\Delta}_{1,2} &= 180^0\end{aligned}\right\} \Rightarrow \hat{A} = \hat{\Delta}_3 \overset{\hat{A} = \hat{\Delta}_4}{\Rightarrow} \hat{\Delta}_3 = \hat{\Delta}_4$$

Στο $\overset{\Delta}{\text{ΔΒΒ΄}}$ η ΔΙ είναι διχοτόμος και ύψος, άρα το $\overset{\Delta}{\text{ΔΒΒ΄}}$ είναι ισοσκελές και ΔΙ είναι και διάμεσος (Β΄Ι = ΙΒ).

Στο $\overset{\Delta}{\text{ΓΒΒ΄}}$ η ΓΙ είναι διάμεσος και ύψος, άρα το $\overset{\Delta}{\text{ΓΒΒ΄}}$ είναι ισοσκελές.



Το κέντρο Κ του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου $\overset{\Delta}{\text{ΑΓΔ}}$ βρίσκεται στη μεσοκάθετο (μ) του ΑΒ΄ (τα Α και Β΄ είναι σταθερά σημεία) και στη μεσοκάθετο του ΓΔ.

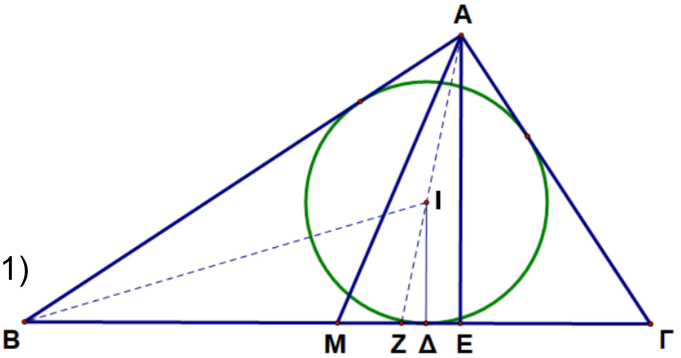
Το σημείο Γ κινείται πάνω στην ευθεία (ε) με εξαίρεση το τμήμα $\Delta_1\Delta_2$, ενώ το σημείο Δ κινείται στο τμήμα $\Delta_1\Delta_2$.

Άρα το σημείο Κ δεν βρίσκεται στο τμήμα K_1K_2 (K_1, K_2 οι προβολές των Δ_1, Δ_2 στη μεσοκάθετο (μ)).

Επομένως ο γεωμετρικός τόπος του κέντρου Κ είναι η ευθεία (μ) με εξαίρεση το ευθύγραμμο τμήμα K_1K_2.

Ζήτημα 2ο

α) Ας υποθέσουμε ότι $\gamma > \beta$.



$$B\Delta = \tau - \gamma = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} - \gamma = \frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}$$

$$M\Delta = MB - B\Delta = \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha+\beta-\gamma}{2} = \frac{\gamma-\beta}{2} \quad (1)$$

$$\boxed{2^{o} \text{ Θεώρημα διαμέσου} : \gamma^2 - \beta^2 = 2\alpha \cdot ME \Rightarrow ME = \frac{\gamma^2-\beta^2}{2\alpha} \ (2)}$$ ή

$$\boxed{\begin{array}{l} \gamma^2 = \alpha \cdot BE \Rightarrow BE = \dfrac{\gamma^2}{\alpha} \\ ME = BE - BM = \dfrac{\gamma^2}{\alpha} - \dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{2\gamma^2-\alpha^2}{2\alpha} = \dfrac{2\gamma^2-(\beta^2+\gamma^2)}{2\alpha} \Rightarrow ME = \dfrac{\gamma^2-\beta^2}{2\alpha} \ (2) \end{array}}$$

$$\frac{ME}{M\Delta} \overset{(1)}{\underset{(2)}{=}} \frac{\frac{\gamma^2-\beta^2}{2\alpha}}{\frac{\gamma-\beta}{2}} = \frac{\cancel{2}\cdot(\gamma^2-\beta^2)}{\cancel{2}\alpha\cdot(\gamma-\beta)} = \frac{(\gamma-\beta)\cdot(\gamma+\beta)}{\alpha\cdot(\gamma-\beta)} \Rightarrow \boldsymbol{\frac{ME}{M\Delta} = \frac{\gamma+\beta}{\alpha}} \quad (3)$$

β) 1η λύση

$$(3) \Rightarrow \beta+\gamma = \alpha\cdot\frac{ME}{M\Delta} \Rightarrow (\beta+\gamma)^2 = \alpha^2\cdot\left(\frac{ME}{M\Delta}\right)^2 \Rightarrow \beta^2+\gamma^2+2\beta\gamma = \alpha^2\cdot\frac{ME^2}{M\Delta^2} \quad (4)$$

$$(1) \Rightarrow \beta-\gamma = 2\cdot M\Delta \Rightarrow (\beta-\gamma)^2 = 4\cdot M\Delta^2 \Rightarrow \beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma = 4\cdot M\Delta^2 \quad (5)$$

$$(4),(5) \overset{(+)}{\Rightarrow} 2(\beta^2+\gamma^2) = \alpha^2\cdot\frac{ME^2}{M\Delta^2} + 4\cdot M\Delta^2 \Rightarrow 2\alpha^2 - \alpha^2\cdot\frac{ME^2}{M\Delta^2} = 4\cdot M\Delta^2 \Rightarrow$$

$$\left(2 - \frac{ME^2}{M\Delta^2}\right)\cdot\alpha^2 = 4\cdot M\Delta^2 \Rightarrow \alpha^2 = \frac{4\cdot M\Delta^2}{2 - \frac{ME^2}{M\Delta^2}} \Rightarrow \alpha^2 = \frac{4\cdot M\Delta^4}{2M\Delta^2 - ME^2} \Rightarrow$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{4\cdot M\Delta^4}{2M\Delta^2 - ME^2}} \Rightarrow \alpha = \frac{2\cdot M\Delta^2}{\sqrt{2M\Delta^2 - ME^2}} \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = \frac{M\Delta^2}{\sqrt{2M\Delta^2 - ME^2}},$$

άρα το τμήμα $\frac{\alpha}{2}$ είναι κατασκευάσιμο, αφού M, Δ, E σταθερά σημεία.

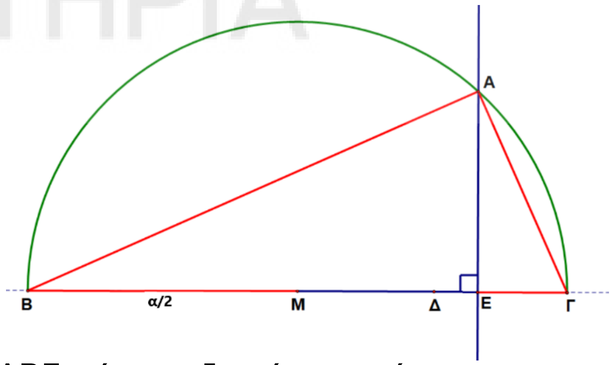
Κατασκευή 1

Σε ευθεία παίρνουμε τα σημεία M, Δ και E.

Με κέντρο το M και ακτίνα $\frac{\alpha}{2} = \frac{M\Delta^2}{\sqrt{2M\Delta^2 - ME^2}}$

γράφουμε ημικύκλιο $\overset{\frown}{B\Gamma}$.

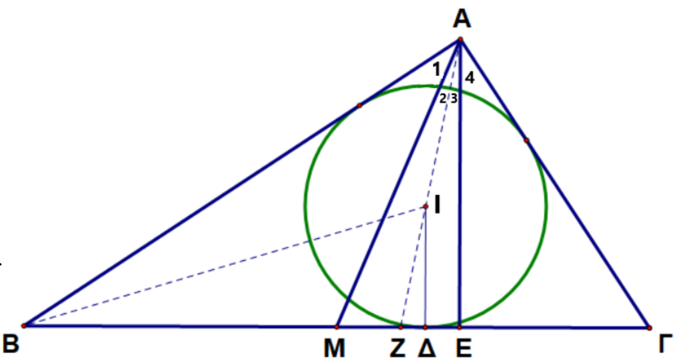
Από το E φέρουμε ευθεία κάθετη στη MΔ



η οποία τέμνει το ημικύκλιο στο σημείο A. Το ΑΒΓ είναι το ζητούμενο τρίγωνο.

Το πρόβλημα έχει λύση όταν $2M\Delta^2 > ME^2 \Leftrightarrow \sqrt{2}\cdot M\Delta > ME$.

$2^{η}$ λύση



$$\left.\begin{aligned} &\text{BI είναι διχοτόμος της } \hat{B} \Rightarrow \frac{AB}{BZ}=\frac{AI}{IZ} \\ &\text{ΓI είναι διχοτόμος της } \hat{Γ} \Rightarrow \frac{AΓ}{ΓZ}=\frac{AI}{IZ} \\ &IΔ \mathbin{//} AE \Rightarrow \frac{ΔE}{ZΔ}=\frac{AI}{IZ} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

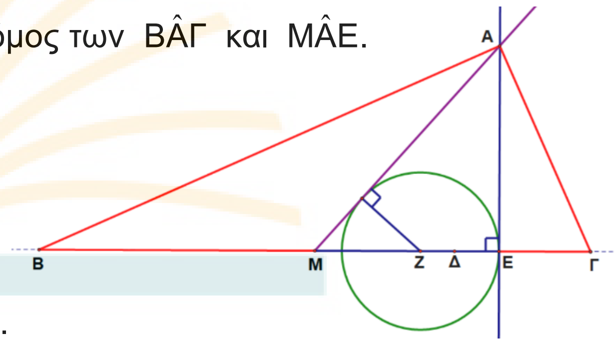
$$\frac{ΔE}{ZΔ}=\frac{AB}{BZ}=\frac{AΓ}{ΓZ} \Rightarrow \frac{ΔE}{ZΔ}=\frac{AB}{BZ}=\frac{AΓ}{ΓZ}=\frac{AB+AΓ}{BZ+ΓZ} \Rightarrow \frac{ΔE}{ZΔ}=\frac{β+γ}{α} \quad (6)$$

$$(3),(6) \Rightarrow \frac{ΔE}{ZΔ}=\frac{ME}{MΔ} \quad (7)$$

Τα $M, Δ, E$ δοσμένα σημεία, άρα το $ZΔ$ κατασκευάζεται.

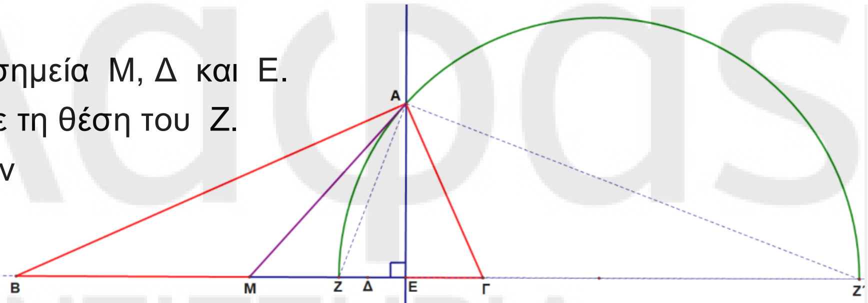
$$\left.\begin{aligned} &\hat{A}_1=\hat{B}=\hat{A}_4 \\ &\hat{A}_{1,2}=\hat{A}_{3,4} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \hat{A}_2=\hat{A}_3, \text{ άρα η } AZ \text{ είναι διχοτόμος των } B\hat{A}Γ \text{ και } M\hat{A}E.$$

Κατασκευή 2



Σε ευθεία (ε) παίρνουμε τα σημεία M, $Δ$ και E.
Από τη σχέση (7) βρίσκουμε τη θέση του Z.
Με κέντρο το Z και ακτίνα ZE γράφουμε κύκλο.
Από τα E και M φέρουμε εφαπτόμενες του κύκλου οι οποίες τέμνονται στο σημείο A.
Στην ευθεία (ε) παίρνουμε σημεία B, $Γ$ εκατέρωθεν του M, ώστε $MB = MΓ = MA$.

Κατασκευή 3



Σε ευθεία (ε) παίρνουμε τα σημεία M, $Δ$ και E.
Από τη σχέση (7) βρίσκουμε τη θέση του Z.
Τα M, Z, E και $Z΄$ αποτελούν αρμονική τετράδα, άρα βρίσκουμε τη θέση του $Z΄$.
Με διάμετρο το $ZZ΄$ γράφουμε ημικύκλιο.
Από το E φέρουμε κάθετη στην (ε) η οποία τέμνει το ημικύκλιο στο σημείο A.
Στην ευθεία (ε) παίρνουμε σημεία B, $Γ$ εκατέρωθεν του M, ώστε $MB = MΓ = MA$.

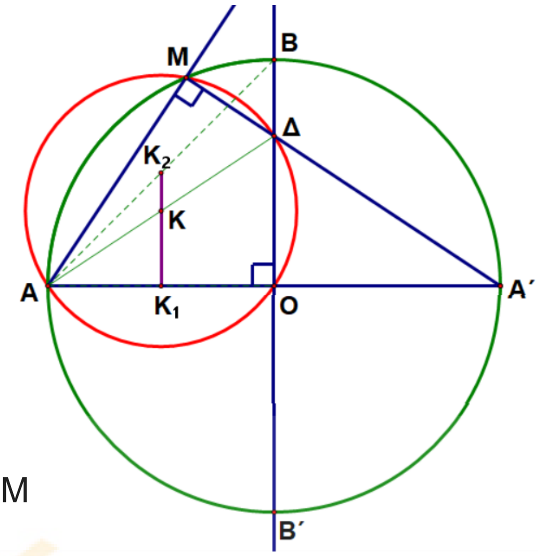
Διερεύνηση

Πρέπει $MZ > ZE \Rightarrow MZ > ME - MZ \Rightarrow 2MZ > ME \Rightarrow 2(BZ - BM) > ME \Rightarrow$

$$2BZ - BΓ > ME \Rightarrow 2\frac{αγ}{β+γ} - α > \frac{γ^2-β^2}{2α} \Rightarrow \frac{α\cdot\cancel{(γ-β)}}{β+γ} > \frac{\cancel{(γ-β)}\cdot(γ+β)}{2α} \Rightarrow$$

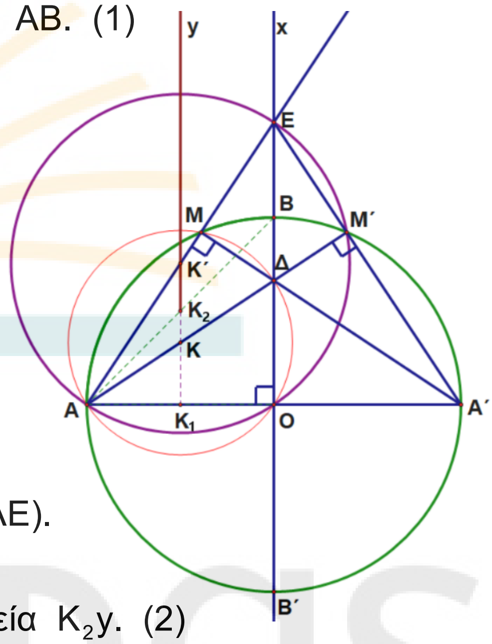
$$\frac{α}{β+γ} > \frac{β+γ}{2α} \Rightarrow \frac{(β+γ)^2}{α^2} > 2 \Rightarrow \frac{β+γ}{α} > \sqrt{2} \Rightarrow \frac{ME}{MΔ} > \sqrt{2}$$

Ζήτημα 3ο



α) $A\hat{M}\Delta = A\hat{O}\Delta = 90^0$, άρα το τετράπλευρο ΑΟΔΜ έχει δύο απέναντι γωνίες ορθές, άρα είναι εγγράψιμο σε κύκλο με διάμετρο ΑΔ.

Το σημείο Δ κινείται στο ευθύγραμμο τμήμα ΟΒ, άρα ο γεωμετρικός τόπος του κέντρου Κ του περιγεγραμμένου κύκλου του τετραπλεύρου ΑΟΔΜ είναι το ευθύγραμμο τμήμα K_1K_2, όπου K_1 είναι το μέσο του ΑΟ και K_2 είναι το μέσο του ΑΒ. (1)



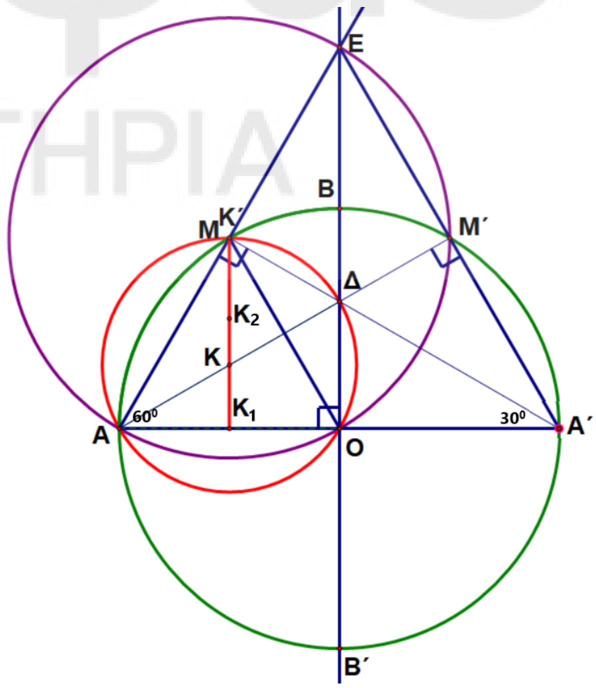
β) Στο $A\overset{\Delta}{E}A'$ τα ΕΟ και Α΄Μ είναι ύψη,

άρα το Δ είναι το ορθόκεντρο του $A\overset{\Delta}{E}A'$.

$A\hat{M}'A' = 90^0$, άρα το ΑΜ΄ είναι το τρίτο ύψος του $A\overset{\Delta}{E}A'$ άρα διέρχεται επίσης από το Δ.

ΕΜ΄Α = ΕΟΑ = 90^0, άρα το τετράπλευρο ΕΜ΄ΟΑ είναι εγγράψιμο σε κύκλο με κέντρο Κ΄ (μέσο του ΑΕ).
Το Ε κινείται στην ημιευθεία Bx, άρα ο γεωμετρικός τόπος του κέντρου Κ΄ είναι η ημιευθεία K_2y. (2)

(1) , (2) $\Rightarrow$ $K \equiv K'$ μόνο στη θέση K_2 (μέσο του ΑΒ), όταν $M \equiv B$.



γ) Αν ρ είναι η ακτίνα του κύκλου (Ο),
R είναι η ακτίνα του κύκλου (Κ)
και R΄ είναι η ακτίνα του κύκλου (Κ΄), τότε :

$\overset{\frown}{AM} = 60^0 \Rightarrow M\hat{A}'A = 30^0 \Rightarrow M\hat{A}O = 60^0$

άρα το $M\overset{\Delta}{A}O$ είναι ισόπλευρο με πλευρά ρ.

$$R = KM = \frac{2}{3}MK_1 = \frac{2}{3}\cdot\frac{\rho\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \mathbf{R = \frac{\rho\sqrt{3}}{3}}$$

$$R' = \frac{AE}{2} = OM \Rightarrow \mathbf{R' = \rho}$$