ΕΙΣΙΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 1964

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑΣ

ΟΜΑΔΑ Γ΄

Δευτέρα 21 Σεπτεμβρίου 1964 (πρωί)

Ζήτημα 1ο

Θέτουμε τοξσυνx = φ, άρα συνφ = x και $Π_ν(x) = συν(νφ)$

$$
\begin{aligned}
Π_{ν+1}(x) + Π_{ν-1}(x) &= συν((ν + 1)φ) + συν((ν - 1)φ) \\
&= 2\cdot συν\frac{(ν + 1)φ + (ν - 1)φ}{2}\cdot συν\frac{(ν + 1)φ - (ν - 1)φ}{2} \\
&= 2\cdot συν\frac{2νφ}{2}\cdot συν\frac{2φ}{2} \\
&= 2\cdot συν(νφ)\cdot συνφ \\
&= 2\cdot Π_ν(x)\cdot x
\end{aligned}
$$

Επομένως $Π_{ν+1}(x) = 2x\cdot Π_ν(x) - Π_{ν-1}(x)$ (1)

$Π_1(x) = συνφ = x$

$Π_2(x) = συν2φ = 2συν^2φ - 1 = 2x^2 - 1$

Τα $Π_1(x)$, $Π_1(x)$ είναι ακέραια πολυώνυμα του x και οι συντελεστές 2x και -1 του τύπου (1) είναι ακέραια μονώνυμα, άρα για κάθε $ν \geq 3$ το $Π_ν(x)$ είναι ακέραιο πολυώνυμο του x.

$(1)\overset{ν=2}{\Rightarrow} Π_3(x) = 2x\cdot Π_2(x) - Π_1(x) = 2x(2x^2 - 1) - x = 4x^3 - 3x$

$(1)\overset{ν=3}{\Rightarrow} Π_4(x) = 2x\cdot Π_3(x) - Π_2(x) = 2x(4x^3 - 3x) - (2x^2 - 1) = 8x^4 - 8x^2 + 1$

$(1)\overset{ν=4}{\Rightarrow} Π_5(x) = 2x\cdot Π_4(x) - Π_3(x) = 2x(8x^4 - 8x^2 + 1) - (4x^3 - 3x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$

$(1)\overset{ν=5}{\Rightarrow} Π_6(x) = 2x\cdot Π_5(x) - Π_4(x) = 2x(16x^5 - 20x^3 + 5x) - (8x^4 - 8x^2 + 1) = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1$

$Π_6(x) = 0 \Leftrightarrow 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1 = 0$

$1^{ος}$ τρόπος

Θέτουμε $x^2 = ω$ και η εξίσωση γίνεται $32ω^3 - 48ω^2 + 18ω - 1 = 0 \Leftrightarrow$

$32ω^3 - 16ω^2 - 32ω^2 + 16ω + 2ω - 1 = 0 \Leftrightarrow$

$16ω^2(2ω - 1) - 16ω(2ω - 1) + (2ω - 1) = 0 \Leftrightarrow$

$(2ω - 1)(16ω^2 - 16ω + 1) = 0 \Leftrightarrow$

$2ω - 1 = 0$ ή $16ω^2 - 16ω + 1 = 0 \Leftrightarrow$

$ω = \dfrac{1}{2}$ ή $ω = \dfrac{2 \pm \sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow x^2 = \dfrac{1}{2}$ ή $x^2 = \dfrac{2 \pm \sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow$

$\mathbf{x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$ ή $\mathbf{x = \pm\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}}$ ή $\mathbf{x = \pm\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}}$.

$2^{ος}$ τρόπος

Το πολυώνυμο $Π_6(x)$ είναι $6^{ου}$ βαθμού και έχει ακριβώς 6 ρίζες.

$Π_6(x) = 0 \Leftrightarrow συν6φ = 0 \Leftrightarrow 6φ = κπ + \dfrac{π}{2}$, με κ ακέραιο $\Leftrightarrow$

$φ = \dfrac{2κπ + π}{12}$, με κ ακέραιο

Για $κ = 0$: $φ_1 = \dfrac{π}{12}$ και $x_1 = συν\dfrac{π}{12} = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$ ή $\dfrac{\sqrt{2}\cdot(\sqrt{3}+1)}{4}$

Για $κ = 1$: $φ_2 = \dfrac{3π}{12} = \dfrac{π}{4}$ και $x_2 = συν\dfrac{π}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Για $κ = 2$: $φ_3 = \dfrac{5π}{12}$ και $x_3 = συν\dfrac{5π}{12} = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$ ή $\dfrac{\sqrt{2}\cdot(\sqrt{3}-1)}{4}$

Για $κ = 3$: $φ_4 = \dfrac{7π}{12}$ και $x_4 = συν\dfrac{7π}{12} = -\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$ ή $-\dfrac{\sqrt{2}\cdot(\sqrt{3}-1)}{4}$

Για $κ = 4$: $φ_5 = \dfrac{9π}{12} = \dfrac{3π}{4}$ και $x_5 = συν\dfrac{3π}{4} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Για $κ = 5$: $φ_6 = \dfrac{11π}{12}$ και $x_6 = συν\dfrac{11π}{12} = -\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$ ή $-\dfrac{\sqrt{2}\cdot(\sqrt{3}+1)}{4}$

Επομένως οι έξι ρίζες του $Π_6(x)$ είναι οι :

$συν\dfrac{π}{12}$, $συν\dfrac{π}{4}$, $συν\dfrac{5π}{12}$, $συν\dfrac{7π}{12}$, $συν\dfrac{3π}{4}$, $συν\dfrac{11π}{12}$,

ή αλλιώς $\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \pm\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}, \pm\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$

ή αλλιώς $\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \pm\dfrac{\sqrt{2}\cdot(\sqrt{3}+1)}{4}, \pm\dfrac{\sqrt{2}\cdot(\sqrt{3}-1)}{4}$

Ζήτημα 2ο

1η λύση

Είναι $\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x = \frac{1}{2}\eta\mu 2x$ και $\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x = \sqrt{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

Η εξίσωση $\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x - \mu\cdot(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x) + 1 = 0$ γράφεται :

$$\frac{1}{2}\eta\mu 2x - \mu\sqrt{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 1 = 0 \quad \overset{x = y + \frac{\pi}{4}}{\Rightarrow}$$

$$\frac{1}{2}\eta\mu\left(2y + \frac{\pi}{2}\right) - \mu\sqrt{2}\cdot\sigma\upsilon\nu y + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu 2y - \mu\sqrt{2}\cdot\sigma\upsilon\nu y + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2}(2\sigma\upsilon\nu^2 y - 1) - \mu\sqrt{2}\cdot\sigma\upsilon\nu y + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu^2 y - \frac{1}{2} - \mu\sqrt{2}\cdot\sigma\upsilon\nu y + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu^2 y - \mu\sqrt{2}\cdot\sigma\upsilon\nu y + \frac{1}{2} = 0 \quad \overset{\sigma\upsilon\nu y = \omega}{\Rightarrow}$$

$$\underbrace{\omega^2 - \mu\sqrt{2}\cdot\omega + \frac{1}{2}}_{P\,(\omega)} = 0$$

Το πολυώνυμο $P\,(\omega)$ έχει διακρίνουσα $\Delta = 2(\mu^2 - 1)$ και

αν $\Delta \geq 0$ ρίζες τις $\rho_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\mu - \sqrt{\mu^2 - 1}\right) \leq \rho_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\mu + \sqrt{\mu^2 - 1}\right)$

$P\,(-1) = \mu\sqrt{2} + \frac{3}{2}$ και

$P\,(1) = -\mu\sqrt{2} + \frac{3}{2}$

μ	$-\infty$		$-\frac{3\sqrt{2}}{4}$		-1		1		$\frac{3\sqrt{2}}{4}$		$+\infty$
Δ		+		+		-		+		+	
P (-1)		-		+		+		+		+	
P (1)		+		+		+		+		-	
η εξίσωση P (ω) = 0		έχει δύο ρίζες $\rho_1<-1<\rho_2<1$		έχει δύο ρίζες $-1<\rho_1<\rho_2<1$		δεν έχει ρίζες		έχει δύο ρίζες $-1<\rho_1<\rho_2<1$		έχει δύο ρίζες $-1<\rho_1<1<\rho_2$	

Για $\mu = -\frac{3\sqrt{2}}{4}$: έχει δύο ρίζες $\rho_1 = -1$, $\rho_2 = -\frac{1}{2}$

Για $\mu = -1$: μια διπλή ρίζα $\rho_1 = \rho_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Για $\mu = 1$: μια διπλή ρίζα $\rho_1 = \rho_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Για $\mu = \frac{3\sqrt{2}}{4}$: έχει δύο ρίζες $\rho_1 = \frac{1}{2}$, $\rho_2 = 1$

Διακρίνουμε περιπτώσεις :

1. αν $\mu \in \left(-\infty, -\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)$ τότε δεκτή ρίζα είναι μόνο η $\rho_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\mu + \sqrt{\mu^2 - 1}\right)$

και υπάρχει γωνία $\theta_2 = \text{τοξσυν}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\mu + \sqrt{\mu^2 - 1}\right)\right]$,

τέτοια ώστε $\text{συν}\theta_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\mu + \sqrt{\mu^2 - 1}\right)$.

Είναι $\text{συν}y = \text{συν}\theta_2 \Leftrightarrow y = 2\kappa\pi \pm \theta_2, \kappa \in Z \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{4} = 2\kappa\pi \pm \theta_2, \kappa \in Z \Leftrightarrow$

$$\boxed{x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{4} \pm \text{τοξσυν}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\mu + \sqrt{\mu^2 - 1}\right)\right], \kappa \in Z}$$

2. αν $\mu \in \left(\frac{3\sqrt{2}}{4}, +\infty\right)$ τότε δεκτή ρίζα είναι μόνο η $\rho_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\mu - \sqrt{\mu^2 - 1}\right)$

και υπάρχει γωνία $\theta_1 = \text{τοξσυν}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\mu - \sqrt{\mu^2 - 1}\right)\right]$,

τέτοια ώστε $\text{συν}\theta_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\mu - \sqrt{\mu^2 - 1}\right)$.

Είναι $\text{συν}y = \text{συν}\theta_1 \Leftrightarrow y = 2\kappa\pi \pm \theta_1, \kappa \in Z \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{4} = 2\kappa\pi \pm \theta_1, \kappa \in Z \Leftrightarrow$

$$\boxed{x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{4} \pm \text{τοξσυν}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\mu - \sqrt{\mu^2 - 1}\right)\right], \kappa \in Z}$$

3. αν $\mu \in \left(-\frac{3\sqrt{2}}{4}, -1\right) \cup \left(1, \frac{3\sqrt{2}}{4}\right)$ τότε δεκτές και οι δύο ρίζες $\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 1}\right)$

και υπάρχουν γωνίες $\theta_1 = \text{τοξσυν}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\mu - \sqrt{\mu^2 - 1}\right)\right]$, $\theta_2 = \text{τοξσυν}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\mu + \sqrt{\mu^2 - 1}\right)\right]$

τέτοιες ώστε $\text{συν}\theta_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\mu - \sqrt{\mu^2 - 1}\right)$ και $\text{συν}\theta_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\mu + \sqrt{\mu^2 - 1}\right)$.

Είναι $\text{συν}y = \text{συν}\theta_1$ ή $\text{συν}y = \text{συν}\theta_2 \Leftrightarrow y = 2\kappa\pi \pm \theta_1$ ή $y = 2\kappa\pi \pm \theta_2, \kappa \in Z \Leftrightarrow$

$x - \frac{\pi}{4} = 2\kappa\pi \pm \theta_1$ ή $x - \frac{\pi}{4} = 2\kappa\pi \pm \theta_2, \kappa \in Z \Leftrightarrow$

$$\boxed{x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{4} \pm \text{τοξσυν}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\mu - \sqrt{\mu^2 - 1}\right)\right] \text{ ή } x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{4} \pm \text{τοξσυν}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\mu + \sqrt{\mu^2 - 1}\right)\right], \kappa \in Z}$$

4. αν $\mu = -\frac{3\sqrt{2}}{4}$ τότε δεκτές και οι δύο ρίζες $\rho_1 = -1$ και $\rho_2 = -\frac{1}{2}$

Είναι $συνy = -1$ ή $συνy = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow συνy = συνπ$ ή $συνy = συν\frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow$

$y = 2κπ + π$ ή $y = 2κπ \pm \frac{2\pi}{3}, κ \in Z \Leftrightarrow$

$x - \frac{\pi}{4} = 2κπ + π$ ή $x - \frac{\pi}{4} = 2κπ \pm \frac{2\pi}{3}, κ \in Z \Leftrightarrow$

$\boxed{\mathbf{x = 2κπ + \frac{5\pi}{4}} \text{ ή } \mathbf{x = 2κπ + \frac{11\pi}{12}} \text{ ή } \mathbf{x = 2κπ - \frac{5\pi}{12}, κ \in Z}}$

5. αν $\mu = \frac{3\sqrt{2}}{4}$ τότε δεκτές και οι δύο ρίζες $\rho_1 = \frac{1}{2}$ και $\rho_2 = 1$

Είναι $συνy = 1$ ή $συνy = \frac{1}{2} \Leftrightarrow συνy = συν0$ ή $συνy = συν\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow$

$y = 2κπ$ ή $y = 2κπ \pm \frac{\pi}{3}, κ \in Z \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{4} = 2κπ$ ή $x - \frac{\pi}{4} = 2κπ \pm \frac{\pi}{3}, κ \in Z \Leftrightarrow$

$\boxed{\mathbf{x = 2κπ + \frac{\pi}{4}} \text{ ή } \mathbf{x = 2κπ + \frac{7\pi}{12}} \text{ ή } \mathbf{x = 2κπ - \frac{\pi}{12}, κ \in Z}}$

6. αν $\mu = -1$ τότε έχουμε μια διπλή ρίζα $\rho_1 = \rho_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ και

Είναι $συνy = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow συνy = συν\frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow y = 2κπ \pm \frac{3\pi}{4}, κ \in Z \Leftrightarrow$

$x - \frac{\pi}{4} = 2κπ \pm \frac{3\pi}{4}, κ \in Z \Leftrightarrow \boxed{\mathbf{x = 2κπ + π} \text{ ή } \mathbf{x = 2κπ - \frac{\pi}{2}, κ \in Z}}$

7. αν $\mu = 1$ τότε έχουμε μια διπλή ρίζα $\rho_1 = \rho_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ και

Είναι $συνy = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow συνy = συν\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow y = 2κπ \pm \frac{\pi}{4}, κ \in Z \Leftrightarrow$

$x - \frac{\pi}{4} = 2κπ \pm \frac{\pi}{4}, κ \in Z \Leftrightarrow \boxed{\mathbf{x = 2κπ + \frac{\pi}{2}} \text{ ή } \mathbf{x = 2κπ, κ \in Z}}$

8. αν $\mu \in (-1\ ,\ 1)$ τότε είναι $\Delta < 0$ και η εξίσωση είναι αδύνατη.

$2^η$ λύση

Θέτουμε $ημx + συνx = y \Leftrightarrow ημx + \dfrac{ημ\frac{π}{4}}{συν\frac{π}{4}}συνx = y \Leftrightarrow$

$ημx \cdot συν\dfrac{π}{4} + ημ\dfrac{π}{4} \cdot συνx = y \cdot συν\dfrac{π}{4} \Leftrightarrow ημ\left(x + \dfrac{π}{4}\right) = \dfrac{y \cdot \sqrt{2}}{2}$ (1)

Πρέπει $-1 \leq \dfrac{y \cdot \sqrt{2}}{2} \leq 1 \Leftrightarrow -\sqrt{2} \leq y \leq \sqrt{2}$ (2)

$ημx + συνx = y \Rightarrow (ημx + συνx)^2 = y^2 \Leftrightarrow 1 + 2ημxσυνx = y^2 \Leftrightarrow$

$2ημxσυνx = y^2 - 1 \Leftrightarrow ημx \cdot συνx = \dfrac{y^2 - 1}{2}$

Η εξίσωση $ημx \cdot συνx - μ \cdot (ημx + συνx) + 1 = 0$ γράφεται :

$\dfrac{y^2 - 1}{2} - μ \cdot y + 1 = 0 \Leftrightarrow y^2 - 2μy + 1 = 0$

Το πολυώνυμο $P(y) = y^2 - 2μy + 1$ έχει διακρίνουσα $Δ = 4(μ^2 - 1)$

αν $Δ \geq 0$ ρίζες τις $ρ_1 = μ - \sqrt{μ^2 - 1} \leq ρ_2 = μ + \sqrt{μ^2 - 1}$

και $P(-\sqrt{2}) = 3 + 2\sqrt{2}μ$ και $P(\sqrt{2}) = 3 - 2\sqrt{2}μ$

μ	$-\infty$ $-\frac{3\sqrt{2}}{4}$	-1	1	$\frac{3\sqrt{2}}{4}$	$+\infty$
Δ	+	+	-	+	+
$P(-\sqrt{2})$	-	+	+	+	+
$P(\sqrt{2})$	+	+	+	+	-
η εξίσωση $P(y) = 0$	**έχει δύο ρίζες $ρ_1 < -\sqrt{2} < ρ_2 < \sqrt{2}$**	**έχει δύο ρίζες $-\sqrt{2} < ρ_1 < ρ_2 < \sqrt{2}$**	**δεν έχει ρίζες**	**έχει δύο ρίζες $-\sqrt{2} < ρ_1 < ρ_2 < \sqrt{2}$**	**έχει δύο ρίζες $-\sqrt{2} < ρ_1 < \sqrt{2} < ρ_2$**

$ρ_1 = -\sqrt{2}$, $ρ_2 = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

μια διπλή ρίζα $ρ_1 = ρ_2 = -1$

μια διπλή ρίζα $ρ_1 = ρ_2 = 1$

$ρ_1 = \sqrt{2}$, $ρ_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Διακρίνουμε περιπτώσεις :

1. αν $μ \in \left(-\infty, -\dfrac{3\sqrt{2}}{4}\right)$ τότε δεκτή ρίζα είναι μόνο η $y_2 = μ + \sqrt{μ^2 - 1}$

 και υπάρχει γωνία $φ_2 = τοξημ\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(μ + \sqrt{μ^2 - 1}\right)\right]$,

 τέτοια ώστε $ημφ_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(μ + \sqrt{μ^2 - 1}\right)$.

 Είναι $ημ\left(x + \dfrac{π}{4}\right) = ημφ_2 \Leftrightarrow x + \dfrac{π}{4} = 2κπ + φ_2$ ή $x + \dfrac{π}{4} = 2κπ + π - φ_2, κ \in Z \Leftrightarrow$

$$\boxed{\mathbf{x = 2κπ - \frac{π}{4} + τοξημ\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\left(μ + \sqrt{μ^2 - 1}\right)\right]} \text{ ή } \mathbf{x = 2κπ + \frac{3π}{4} - τοξημ\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\left(μ + \sqrt{μ^2 - 1}\right)\right], κ \in Z}}$$

2. αν $\mu \in \left(\frac{3\sqrt{2}}{4}\ , +\infty\right)$ τότε δεκτή ρίζα είναι μόνο η $y_1 = \mu - \sqrt{\mu^2 - 1}$ και υπάρχει γωνία

$\varphi_1 = \text{τοξημ}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\mu - \sqrt{\mu^2 - 1}\right)\right]$, τέτοια ώστε $\text{ημ}\varphi_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\mu - \sqrt{\mu^2 - 1}\right)$.

Είναι $\text{ημ}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \text{ημ}\varphi_1 \;\Leftrightarrow\; x + \frac{\pi}{4} = 2\kappa\pi + \varphi_1$ ή $x + \frac{\pi}{4} = 2\kappa\pi + \pi - \varphi_1, \kappa \in Z \;\Leftrightarrow$

$$\boxed{\mathbf{x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{4} + \text{τοξημ}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\mu - \sqrt{\mu^2 - 1}\right)\right]} \text{ ή } \mathbf{x = 2\kappa\pi + \frac{3\pi}{4} - \text{τοξημ}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\mu - \sqrt{\mu^2 - 1}\right)\right], \kappa \in Z}}$$

3. αν $\mu \in \left(-\frac{3\sqrt{2}}{4}\ , -1\right) \cup \left(1\ , \frac{3\sqrt{2}}{4}\right)$ τότε δεκτές και οι δύο ρίζες $y_{1,2} = \mu \pm \sqrt{\mu^2 - 1}$

και υπάρχουν γωνίες $\varphi_1 = \text{τοξημ}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\mu - \sqrt{\mu^2 - 1}\right)\right]$, $\varphi_1 = \text{τοξημ}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\mu - \sqrt{\mu^2 - 1}\right)\right]$

τέτοιες ώστε $\text{ημ}\varphi_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\mu - \sqrt{\mu^2 - 1}\right)$ και $\text{ημ}\varphi_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\mu + \sqrt{\mu^2 - 1}\right)$.

Είναι $\text{ημ}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \text{ημ}\varphi_1$ ή $\text{ημ}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \text{ημ}\varphi_2 \;\Leftrightarrow$

$x + \frac{\pi}{4} = 2\kappa\pi + \varphi_1$ ή $x + \frac{\pi}{4} = 2\kappa\pi + \pi - \varphi_1$ ή $x + \frac{\pi}{4} = 2\kappa\pi + \varphi_2$ ή $x + \frac{\pi}{4} = 2\kappa\pi + \pi - \varphi_2, \kappa \in Z \;\Leftrightarrow$

$$\boxed{\mathbf{x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{4} + \text{τοξσυν}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 1}\right)\right]} \text{ ή } \mathbf{x = 2\kappa\pi + \frac{3\pi}{4} + \text{τοξσυν}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 1}\right)\right], \kappa \in Z}}$$

4. αν $\mu = -\frac{3\sqrt{2}}{4}$ τότε δεκτές και οι δύο ρίζες $y_1 = -\sqrt{2}$ και $y_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Είναι $\text{ημ}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -1$ ή $\text{ημ}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2} \;\Leftrightarrow\; \text{ημ}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \text{ημ}\frac{3\pi}{2}$ ή $\text{ημ}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \text{συν}\frac{-\pi}{6} \;\Leftrightarrow$

$x + \frac{\pi}{4} = 2\kappa\pi + \frac{3\pi}{2}$ ή $x + \frac{\pi}{4} = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{6}$ ή $x + \frac{\pi}{4} = 2\kappa\pi + \pi + \frac{\pi}{6}, \kappa \in Z \;\Leftrightarrow$

$$\boxed{\mathbf{x = 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{4}} \text{ ή } \mathbf{x = 2\kappa\pi - \frac{5\pi}{12}} \text{ ή } \mathbf{x = 2\kappa\pi + \frac{11\pi}{12}, \kappa \in Z}}$$

5. αν $\mu = \frac{3\sqrt{2}}{4}$ τότε δεκτές και οι δύο ρίζες $y_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ και $y_2 = \sqrt{2}$

$\text{ημ}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$ ή $\text{ημ}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \;\Leftrightarrow\; \text{ημ}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \text{ημ}\frac{\pi}{2}$ ή $\text{ημ}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \text{συν}\frac{\pi}{6} \;\Leftrightarrow$

$x + \frac{\pi}{4} = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}$ ή $x + \frac{\pi}{4} = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6}$ ή $x + \frac{\pi}{4} = 2\kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{6}, \kappa \in Z \;\Leftrightarrow$

$$\boxed{\mathbf{x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{4}} \text{ ή } \mathbf{x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{12}} \text{ ή } \mathbf{x = 2\kappa\pi + \frac{7\pi}{12}, \kappa \in Z}}$$

6. αν $\mu = -1$ τότε έχουμε μια διπλή ρίζα $y_1 = y_2 = -1$ και

$\text{ημ}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \;\Leftrightarrow\; \text{ημ}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \text{ημ}\frac{-\pi}{4} \;\Leftrightarrow\; x + \frac{\pi}{4} = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{4}$ ή $x + \frac{\pi}{4} = 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{4}, \kappa \in Z \;\Leftrightarrow$

$$\boxed{\mathbf{x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2}} \text{ ή } \mathbf{x = 2\kappa\pi + \pi, \kappa \in Z}}$$

7. αν $\mu = 1$ τότε έχουμε μια διπλή ρίζα $y_1 = y_2 = 1$ και

$\text{ημ}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \;\Leftrightarrow\; \text{ημ}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \text{ημ}\frac{\pi}{4} \;\Leftrightarrow\; x + \frac{\pi}{4} = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{4}$ ή $x + \frac{\pi}{4} = 2\kappa\pi + \frac{3\pi}{4}, \kappa \in Z \;\Leftrightarrow$

$$\boxed{\mathbf{x = 2\kappa\pi} \text{ ή } \mathbf{x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in Z}}$$

8. αν $\mu \in (-1\ , 1)$ τότε είναι $\Delta < 0$ και η εξίσωση είναι αδύνατη.

Ζήτημα 3ο

$$\begin{cases} ημα + ημβ + ημγ = 0 \\ συνα + συνβ + συνγ = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ημα + ημβ = -ημγ \\ συνα + συνβ = -συνγ \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} (ημα + ημβ)^2 = ημ^2γ \\ (συνα + συνβ)^2 = συν^2γ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ημ^2α + ημ^2β + 2ημαημβ = ημ^2γ \\ συν^2α + συν^2β + 2συνασυνβ = συν^2γ \end{cases} \overset{(+)}{\Rightarrow}$$

$$ημ^2α + συν^2α + ημ^2β + συν^2β + 2ημαημβ + 2συνασυνβ = ημ^2γ + συν^2γ \Leftrightarrow$$

$$1 + 1 + 2(συνασυνβ + ημαημβ) = 1 \Leftrightarrow 2συν(α - β) = -1 \Leftrightarrow συν(α - β) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$συν(α - β) = συν\frac{2π}{3} \Rightarrow α - β = 2κ_1π \pm \frac{2π}{3},\ κ_1 \in Z \ \ (1)$$

Όμοια βρίσκουμε $συν(β - γ) = -\frac{1}{2}$, άρα $β - γ = 2κ_2π \pm \frac{2π}{3},\ κ_2 \in Z$ (2)

και $συν(γ - α) = -\frac{1}{2}$, άρα $γ - α = 2κ_3π \pm \frac{2π}{3},\ κ_3 \in Z$ (3)

• Έστω $α - β = 2κ_1π + \frac{2π}{3},\ κ_1 \in Z \Leftrightarrow α = 2κ_1π + \frac{2π}{3} + β,\ κ_1 \in Z$ (4)

▹ Αν $β - γ = 2κ_2π - \frac{2π}{3},\ κ_2 \in Z$ τότε με πρόσθεση έχουμε

$α - γ = 2(κ_1 + κ_2)π,\ κ_1, κ_2 \in Z \ \rightarrow$ ΑΤΟΠΟ από (3)

Άρα $β - γ = 2κ_2π + \frac{2π}{3},\ κ_2 \in Z \Leftrightarrow γ = -2κ_2π - \frac{2π}{3} + β,\ κ_2 \in Z$ (5)

$$ημ^2α + ημ^2β + ημ^2γ \overset{(4)}{\underset{(5)}{=}} ημ^2\left(2κ_1π + \frac{2π}{3} + β\right) + ημ^2β + ημ^2\left(-2κ_2π - \frac{2π}{3} + β\right)$$

$$= ημ^2\left(β + \frac{2π}{3}\right) + ημ^2β + ημ^2\left(β - \frac{2π}{3}\right)$$

$$= \frac{1 - συν\left(2β + \frac{4π}{3}\right)}{2} + \frac{1 - συν2β}{2} + \frac{1 - συν\left(2β - \frac{4π}{3}\right)}{2}$$

$$= \frac{3 - \left[συν2β + συν\left(2β + \frac{4π}{3}\right) + συν\left(2β - \frac{4π}{3}\right)\right]}{2}$$

$$= \frac{3 - \left(συν2β + 2 \cdot συν2β \cdot συν\frac{4π}{3}\right)}{2}$$

$$= \frac{3 - \left[συν2β + 2 \cdot συν2β \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)\right]}{2} = \frac{3}{2}$$

• Έστω $\alpha - \beta = 2\kappa_1\pi - \dfrac{2\pi}{3}, \kappa_1 \in Z \Leftrightarrow \alpha = 2\kappa_1\pi - \dfrac{2\pi}{3} + \beta, \kappa_1 \in Z$ (6)

▹ Αν $\beta - \gamma = 2\kappa_2\pi + \dfrac{2\pi}{3}, \kappa_2 \in Z$ τότε με πρόσθεση έχουμε

$\alpha - \gamma = 2(\kappa_1 + \kappa_2)\pi, \kappa_1, \kappa_2 \in Z \rightarrow$ ΑΤΟΠΟ από (3)

Άρα $\beta - \gamma = 2\kappa_2\pi - \dfrac{2\pi}{3}, \kappa_2 \in Z \Leftrightarrow \gamma = -2\kappa_2\pi + \dfrac{2\pi}{3} + \beta, \kappa_2 \in Z$ (7)

$$\eta\mu^2\alpha + \eta\mu^2\beta + \eta\mu^2\gamma \overset{(6)}{\underset{(7)}{=}} \eta\mu^2\left(2\kappa_1\pi - \frac{2\pi}{3} + \beta\right) + \eta\mu^2\beta + \eta\mu^2\left(-2\kappa_2\pi + \frac{2\pi}{3} + \beta\right)$$

$$= \eta\mu^2\left(\beta - \frac{2\pi}{3}\right) + \eta\mu^2\beta + \eta\mu^2\left(\beta + \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$= \frac{1 - \sigma\upsilon\nu\left(2\beta - \frac{4\pi}{3}\right)}{2} + \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2\beta}{2} + \frac{1 - \sigma\upsilon\nu\left(2\beta + \frac{4\pi}{3}\right)}{2}$$

$$= \frac{3 - \left[\sigma\upsilon\nu 2\beta + \sigma\upsilon\nu\left(2\beta + \frac{4\pi}{3}\right) + \sigma\upsilon\nu\left(2\beta - \frac{4\pi}{3}\right)\right]}{2}$$

$$= \frac{3 - \left(\sigma\upsilon\nu 2\beta + 2\cdot\sigma\upsilon\nu 2\beta\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{4\pi}{3}\right)}{2}$$

$$= \frac{3 - \left[\sigma\upsilon\nu 2\beta + 2\cdot\sigma\upsilon\nu 2\beta\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\right]}{2}$$

$$= \frac{3 - (\sigma\upsilon\nu 2\beta - \sigma\upsilon\nu 2\beta)}{2} = \frac{3}{2}$$

Επομένως σε κάθε περίπτωση $\boxed{\boldsymbol{\eta\mu^2\alpha + \eta\mu^2\beta + \eta\mu^2\gamma = \frac{3}{2}}}$

$\eta\mu^2\alpha + \eta\mu^2\beta + \eta\mu^2\gamma = \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow$

$1 - \sigma\upsilon\nu^2\alpha + 1 - \sigma\upsilon\nu^2\beta + 1 - \sigma\upsilon\nu^2\gamma = \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow$

$-\sigma\upsilon\nu^2\alpha - \sigma\upsilon\nu^2\beta - \sigma\upsilon\nu^2\gamma = \dfrac{3}{2} - 3 \Leftrightarrow$

$\sigma\upsilon\nu^2\alpha + \sigma\upsilon\nu^2\beta + \sigma\upsilon\nu^2\gamma = 3 - \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow$

$\boxed{\boldsymbol{\sigma\upsilon\nu^2\alpha + \sigma\upsilon\nu^2\beta + \sigma\upsilon\nu^2\gamma = \frac{3}{2}}}$