ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 15 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2000
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α.1. Αν $z_1 = α + βi$ και $z_2 = γ + δi$ τότε :

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{(α + βi)(γ + δi)} = \overline{αγ + αδi + βγi - βδ} = \overline{(αγ - βδ) + (βγ + αδ)i}$$
$$= (αγ - βδ) - (βγ + αδ)i$$

$$\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = (α - βi) \cdot (γ - δi) = αγ - αδi - βγi - βδ = (αγ - βδ) - (βγ + αδ)i$$

άρα $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

Α. 2. α - 4, β - 5, γ - 2.

Β.1. Γ.

Β.2. 1ος τρόπος : $z_1^{16} = (1 + i)^{16} = [(1 + i)^2]^8 = (2i)^8 = 2^8 i^8 = \mathbf{256}$.

2ος τρόπος :

$$\left.\begin{aligned} ρ &= |z| = |1 + i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \\ συνφ &= ημφ = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow φ = \frac{π}{4} \end{aligned}\right\} z = \sqrt{2}\left(συν\frac{π}{4} + iημ\frac{π}{4}\right)$$

$$z^{16} = \left[\sqrt{2}\left(συν\frac{π}{4} + iημ\frac{π}{4}\right)\right]^{16} = \left(\sqrt{2}\right)^{16}\left(συν\frac{π}{4} + iημ\frac{π}{4}\right)^{16}$$

$$= \left[\left(\sqrt{2}\right)^2\right]^8\left(συν\frac{16π}{4} + iημ\frac{16π}{4}\right) = 2^8\left(συν4π + iημ4π\right)$$

$$= 256(1 + 0i) = \mathbf{256}$$

ΘΕΜΑ 2ο

Α. α. Πρέπει $κ + 2λ - 3 = λ + 1 \Leftrightarrow \mathbf{κ + λ = 4}$ ή $\mathbf{λ = 4 - κ}$ **(1)**.

β. Πρέπει $κ^2 - 2κ - 1 = 3κ - κ^2 + 2 \Leftrightarrow 2κ^2 - 5κ - 3 = 0 \Leftrightarrow \mathbf{κ = 3}$ ή $κ = -\frac{1}{2}$

Στη σχέση (1) για $κ = 3$ έχουμε $\mathbf{λ = 1}$.

Β. α. $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \mathbf{-I}$

β. $2A^{2004} + A^{2001} + A^{1999} = 2(A^2)^{1002} + (A^2)^{1000} \cdot A + (A^2)^{999} \cdot A$
$= 2 \cdot (-I)^{1002} + (-I)^{1000} \cdot A + (-I)^{999} \cdot A$
$= 2I + I \cdot A - I \cdot A = \mathbf{2I}$

ΘΕΜΑ 3ο

α. $D_f = (-\infty\ ,\ \alpha) \cup (\alpha\ ,\ +\infty)$ και $4 \notin D_f$ άρα $\boldsymbol{\alpha = 4}$.

β. Πρέπει $\lambda_{\varepsilon\varphi\alpha\pi\tau.} = \lambda_{AM} = f'(1)$.

$$f'(x) = \left(\frac{x^2 - 3x + 2}{x - \alpha}\right)' = \frac{(2x-3)(x-\alpha) - (x^2 - 3x + 2)}{(x-\alpha)^2}$$

$$= \frac{2x^2 - 2\alpha x - 3x + 3\alpha - x^2 + 3x - 2}{(x-\alpha)^2} = \frac{x^2 - 2\alpha x + 3\alpha - 2}{(x-\alpha)^2}$$

$$\left.\begin{aligned} f'(1) &= \frac{1 - 2\alpha + 3\alpha - 2}{(1-\alpha)^2} = \frac{\alpha - 1}{(\alpha-1)^2} = \frac{1}{\alpha - 1} \\ \lambda_{AM} &= \frac{0-3}{1+2} = \frac{-3}{3} = -1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{1}{\alpha - 1} = -1 \iff \boldsymbol{\alpha = 0}$$

γ. Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει x_0, τέτοιο ώστε $f'(x_0) = 0$.

1ος τρόπος

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[1\ ,\ 2]$ και $f(1) = f(2) = 0$.

Από Θ.Rolle υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (1\ ,\ 2)$, τέτοιο ώστε $f'(x_0) = 0$.

2ος τρόπος

$$f'(x) = 0 \iff \frac{x_0^2 - 2\alpha x_0 + 3\alpha - 2}{(x_0 - \alpha)^2} = 0 \iff x_0^2 - 2\alpha x_0 + 3\alpha - 2 = 0$$

Πρέπει $\Delta \geq 0 \iff (-2\alpha)^2 - 4\cdot 1\cdot(3\alpha - 2) \geq 0 \iff 4\alpha^2 - 12\alpha + 8 \geq 0 \iff$

$\alpha^2 - 3\alpha + 2 \geq 0 \iff (\alpha - 1)(\alpha - 2) \geq 0$, που ισχύει διότι $\alpha > 2$.

$$x_0 = \frac{2\alpha \pm \sqrt{4\alpha^2 - 12\alpha + 8}}{2} = \frac{2\alpha \pm 2\sqrt{\alpha^2 - 3\alpha + 2}}{2} = \alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 3\alpha + 2}$$

Είναι $\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 3\alpha + 2} > \alpha > 2$, άρα αρκεί να δείξουμε ότι

$1 < \alpha - \sqrt{\alpha^2 - 3\alpha + 2} < 2 \iff 1 - \alpha < \sqrt{\alpha^2 - 3\alpha + 2} < 2 - \alpha \iff$

$\alpha - 1 > \sqrt{\alpha^2 - 3\alpha + 2} > \alpha - 2 \iff \alpha^2 - 2\alpha + 1 > \alpha^2 - 3\alpha + 2 > \alpha^2 - 4\alpha + 4$

$\overset{+(-\alpha^2 + 3\alpha - 2)}{\iff} \quad \alpha - 1 > 0 > 2 - \alpha$ που ισχύει αφού $\alpha > 2$.

Επομένως υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (1\ ,\ 2)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = 0$,

με $x_0 = \alpha - \sqrt{\alpha^2 - 3\alpha + 2}$.

ΘΕΜΑ 4ο

α. 1000 γραπτά · 2 φορές = 2000 βαθμολογήσεις
κάθε πακέτο έχει 4 φακέλους · 25 γραπτά = 100 γραπτά
2000 : 100 = 20 πακέτα βαθμολόγησης
Κόστος βαθμολόγησης = 20 · 2000 δρχ. = 40 000 δρχ = 40 χιλ. δρχ. **(1)**
Επίδομα = 10000 · x βαθμολογητές = 10000x δρχ. = 10x χιλ. δρχ. **(2)**

Η διόρθωση θα διαρκέσει $\dfrac{20 \text{ πακέτα}}{x \text{ βαθμολογητές}} = \dfrac{20}{x}$ μέρες **(3)**

Οι επόπτες θα πάρουν $2 \cdot \dfrac{20}{x} \cdot 4000 = \dfrac{160000}{x}$ δρχ. $= \dfrac{160}{x}$ χιλ.δρχ. **(4)**

Από (1) , (2) και (4) έχουμε :

$$K(x) = 400 + 10x + \frac{160}{x} = 10\left(40 + x + \frac{16}{x}\right) \text{ σε χιλ. δρχ., } x > 0$$

β. $K'(x) = 10\left(40 + x + \dfrac{16}{x}\right)' = 10\left(1 - \dfrac{16}{x^2}\right) = 10\dfrac{x^2 - 16}{x^2}, \; x > 0$

x	0		4		$+\infty$
K΄(x)		-	0	+	
K (x)		$\searrow$		$\nearrow$	

Ελάχιστο κόστος για x = **4 βαθμολογητές**.

γ. Ελάχιστο κόστος = K (4) = **480 χιλ. δρχ**.
Από τη σχέση (3), για x = 4 έχουμε ότι η διόρθωση των γραπτών θα γίνει σε **5 μέρες.**