Κελάφας
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΕΤΑΡΤΗ 4 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2002
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΑΛΓΕΒΡΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Η ταυτότητα της διαίρεσης του πολυωνύμου $P(x)$ με το πολυώνυμο $x - \rho$ γράφεται $P(x) = (x - \rho)\cdot \pi(x) + \upsilon(x)$. Επειδή ο διαιρέτης $x - \rho$ είναι πρώτου βαθμού, το υπόλοιπο της διαίρεσης θα είναι ένα σταθερό πολυώνυμο υ. Έτσι έχουμε: $P(x) = (x - \rho)\cdot \pi(x) + \upsilon$ και, αν θέσουμε $x = \rho$, παίρνουμε $P(\rho) = (\rho - \rho)\cdot \pi(\rho) + \upsilon = 0 + \upsilon = \upsilon$
Επομένως $\upsilon = P(\rho)$.

Β. 1 – Λ, 2 – Σ, 3 – Λ, 4 – Σ.

ΘΕΜΑ 2ο

α. $\alpha_5^2 = \alpha_4\cdot\alpha_6 \Rightarrow x^2 = 2\cdot\left(x - \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow x^2 = 2x - 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow$

$(x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x = 1}$

β. Για $x = 1$: $\alpha_4 = 2,\ \alpha_5 = 1,\ \alpha_6 = \frac{1}{2}$

$\lambda = \frac{\alpha_5}{\alpha_4} \Rightarrow \boldsymbol{\lambda = \frac{1}{2}}$

γ. $\alpha_4 = \alpha_1\cdot\lambda^3 \Rightarrow 2 = \alpha_1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3 \Leftrightarrow 2 = \alpha_1\cdot\frac{1}{8} \Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha_1 = 16}$

δ. $S_5 = \alpha_1\cdot\frac{\lambda^5 - 1}{\lambda - 1} = 16\cdot\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^5 - 1}{\frac{1}{2} - 1} = 16\cdot\frac{\frac{1}{32} - 1}{-\frac{1}{2}} = 16\cdot\frac{-\frac{31}{32}}{-\frac{1}{2}} = 16\cdot\frac{31}{16} \Rightarrow \mathbf{S_5 = 31}$

Κελάφας
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

ΘΕΜΑ 3ο

α. $\eta\mu\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)=\sigma\upsilon\nu\left[\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)\right]=\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}-\alpha\right)=\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$

β. $\eta\mu\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)+\eta\mu\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)=\eta\mu\frac{\pi}{6}\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha+\cancel{\eta\mu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6}}+\eta\mu\frac{\pi}{6}\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha-\cancel{\eta\mu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6}}$

$$=2\cdot\eta\mu\frac{\pi}{6}\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha=\sigma\upsilon\nu\alpha$$

γ. $\eta\mu\left(\frac{\pi}{6}+x\right)+\eta\mu\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=\frac{1}{2}\overset{(\beta)}{\Leftrightarrow}\sigma\upsilon\nu x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow$

$\mathbf{x=2\kappa\pi\pm\frac{\pi}{3},\ \kappa\in Z}$.

ΘΕΜΑ 4ο

α. Για να είναι τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ ίσα θα πρέπει

$$\begin{cases}\kappa-3=1\\ \kappa+\lambda=9\\ 31-\lambda=26\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\kappa=4\\ \kappa+\lambda=9\\ \lambda=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\boldsymbol{\kappa=4}\\ \boldsymbol{\lambda=5}\end{cases}$$

$8-4(\kappa+1)+2(\kappa-1)+2=0\ \Leftrightarrow$

$8-4\kappa-4+2\kappa-2+2=0\ \Leftrightarrow$

$-2\kappa+4=0\ \Leftrightarrow$

$-2\kappa=-4\ \Leftrightarrow$

$\boldsymbol{\kappa=2}$

β. $Q(-1)=(-1)^3+9\cdot(-1)^2+26\cdot(-1)+24=-1+9-26+24=6$,

άρα **το υπόλοιπο της διαίρεσης $Q(x):(x+1)$ είναι $\upsilon=6$**

Κελάφας
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

γ. $Q(-2) = (-2)^3 + 9\cdot(-2)^2 + 26\cdot(-2) + 24$

$= -8 + 36 - 52 + 24$

$= 0$

άρα **το -2 είναι ρίζα του $Q(x)$**.

δ. 1ος τρόπος

$Q(x) = 0 \Leftrightarrow$

$x^3 + 9x^2 + 26x + 24 = 0 \Leftrightarrow$

$(x+2)\cdot(x^2 + 7x + 12) = 0 \Leftrightarrow$

$(x+2)\cdot(x+3)\cdot(x+4) = 0 \Leftrightarrow$

$x + 2 = 0$ ή $x + 3 = 0$ ή $x + 4 = 0 \Leftrightarrow$

$x = -2$ ή $x = -3$ ή $x = -4$

1	9	26	24	**-2**
↓	-2	-14	-24	
1	**7**	**12**	**0**	

άρα **το $Q(x)$ δεν έχει θετικές ρίζες**.

2ος τρόπος

Έστω ρ μια θετική ρίζα του $Q(x)$, δηλαδή $Q(\rho) = 0$

Τότε $\rho^3 > 0$, $9\rho^2 > 0$, $26\rho > 0$ και $24 > 0$

άρα $\rho^3 + 9\rho^2 + 26\rho + 24 > 0 \Leftrightarrow$

$Q(\rho) > 0 \Leftrightarrow 0 > 0$ (ΑΤΟΠΟ)

Επομένως **το $Q(x)$ δεν έχει θετικές ρίζες**.

Κελάφας
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ