Κελάφας
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ
ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΔΕΥΤΕΡΑ 26 ΜΑΪΟΥ 2003
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1ο

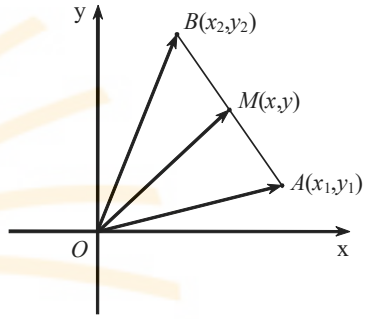
Α. Επειδή $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right)$ και

$\overrightarrow{OM} = (x\ ,\ y)$, $\overrightarrow{OA} = (x_1\ ,\ y_1)$, $\overrightarrow{OB} = (x_2\ ,\ y_2)$,

έχουμε

$$(x\ ,\ y) = \frac{1}{2}\cdot[(x_1\ ,\ y_1) + (x_2\ ,\ y_2)] = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\ ,\ \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

Επομένως ισχύει $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$ και $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$.



Β. 1 – Λ, 2 – Σ, 3 – Σ, 4 – Σ.

ΘΕΜΑ 2ο

α) $$\begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 = \frac{1 + 2\mu + 1}{2} \\ 2 = \frac{1 + \lambda - 2}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\mu + 2 = 6 \\ \lambda - 1 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = 2 \\ \lambda = 5 \end{cases}$$

άρα **Β (5 , 3)**

β) $\overrightarrow{\Gamma M} = (x_M - x_\Gamma\ ,\ y_M - y_\Gamma) = (3 - 4\ ,\ 2 - 0) = (-1\ ,\ 2)$

$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A\ ,\ y_B - y_A) = (5 - 1\ ,\ 3 - 1) = (4\ ,\ 2)$

$\overrightarrow{\Gamma M}\cdot\overrightarrow{AB} = -1\cdot 4 + 2\cdot 2 = -4 + 4 = 0$, άρα $\overrightarrow{\Gamma M} \perp \overrightarrow{AB}$

γ) $\overrightarrow{\Gamma A} = (x_A - x_\Gamma\ ,\ y_A - y_\Gamma) = (1 - 4\ ,\ 1 - 0) = (-3\ ,\ 1)$

$\overrightarrow{\Gamma B} = (x_B - x_\Gamma\ ,\ y_B - y_\Gamma) = (5 - 4\ ,\ 3 - 0) = (1\ ,\ 3)$

$$\left.\begin{aligned} |\overrightarrow{\Gamma A}| &= \sqrt{(-3)^2 + 1^2} = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10} \\ |\overrightarrow{\Gamma B}| &= \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10} \end{aligned}\right\} \Rightarrow |\overrightarrow{\Gamma A}| = |\overrightarrow{\Gamma B}|$$

Κελάφας
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

ΘΕΜΑ 3ο

α) (1) $\Leftrightarrow$ $x^2 + y^2 - 2\lambda x + \lambda^2 - 5 = 0$

$A^2 + B^2 + - 4\Gamma = (-2\lambda)^2 + 0^2 - 4\cdot(\lambda^2 - 5) = 4\lambda^2 - 4\lambda^2 + 20 = 20 > 0$

άρα **η (1) παριστάνει κύκλο για κάθε** $\lambda \in$ **IR**.

β) Για $\lambda = 1$ είναι $C : x^2 + y^2 - 2x - 4 = 0$

Κύκλος με κέντρο $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right) \rightarrow$ **K (1, 0)**

και ακτίνα $\rho = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 + - 4\Gamma}}{2} = \frac{\sqrt{20}}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{2} \Rightarrow$ **ρ = $\sqrt{5}$**

γ) $\begin{cases} y = x \\ x^2 + y^2 - 2x - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow x^2 + x^2 - 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow$

$x^2 - x - 2 = 0 \rightarrow \Delta = 9$, άρα $x = \frac{1 \pm 3}{2} \begin{matrix} 2 \\ -1 \end{matrix}$

Για $x = 2$ είναι $y = 2$, άρα **A (2 , 2)** και

για $x = -1$, είναι $y = -1$, άρα **B (-1 , - 1)**.

ΘΕΜΑ 4ο

α) Για $t = 5$ είναι $M(2 + 5\kappa , \lambda + 10) \equiv A(7 , 13) \Rightarrow$

$\begin{cases} 2 + 5\kappa = 7 \\ \lambda + 10 = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5\kappa = 5 \\ \lambda = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{\kappa = 1} \\ \boldsymbol{\lambda = 3} \end{cases}$

β) $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 + 2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = x - 2 \\ y = 3 + 2t \end{cases} \Rightarrow y = 3 + 2(x - 2) \Leftrightarrow y = 2x - 1$

άρα **το σημείο M ανήκει στην ευθεία (ε) : y = 2x - 1**.

γ) (ε) : $-2x + y + 1 = 0$

$\vec{\delta} = (-2 , 1) \perp (\varepsilon)$ με $|\vec{\delta}| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2} = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$

$\vec{\delta}_0 = \frac{1}{|\vec{\delta}|}\cdot\vec{\delta} = \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot(-2 , 1) = \frac{\sqrt{5}}{5}\cdot(-2 , 1) = \left(-\frac{2\sqrt{5}}{5} , \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$

Το $\vec{\delta}_0$ είναι το ζητούμενο διάνυσμα.