Κελάφας
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ
ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΔΕΥΤΕΡΑ 24 ΜΑΪΟΥ 2004
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. α – 5, β – 1, γ – 4, δ – 3.

Β. Σ

Γ. Λ

Δ. $\vec{\alpha}\cdot(\vec{\beta}+\vec{\gamma}) = (x_1\ ,\ y_1)\cdot(x_2+x_3\ ,\ y_2+y_3) = x_1\cdot(x_2+x_3)+y_1\cdot(y_2+y_3)$

$= (x_1x_2+x_1x_3)+(y_1y_2+y_1y_3) = (x_1x_2+y_1y_2)+(x_1x_3+y_1y_3)$

$= \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}$

ΘΕΜΑ 2ο

α) $\lambda_{\varepsilon_1} = \dfrac{-3}{-2} = \dfrac{3}{2}$ και $\lambda_{\varepsilon_2} = \dfrac{-2}{3} = -\dfrac{2}{3}$

$\lambda_{\varepsilon_1}\cdot\lambda_{\varepsilon_2} = \dfrac{3}{2}\cdot\left(-\dfrac{2}{3}\right) = -1$, άρα $\boldsymbol{\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2}$

β) 1) $A\ (\alpha\ ,\ 2)\in\varepsilon_1 \Leftrightarrow 3\alpha - 2\cdot 2 + 1 = 0 \Leftrightarrow 3\alpha = 3 \Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha = 1}$

$B\ (-5\ ,\ \beta)\in\varepsilon_2 \Leftrightarrow 2(-5) + 3\beta - 8 = 0 \Leftrightarrow 3\beta = 18 \Leftrightarrow \boldsymbol{\beta = 6}$

2) $M\ (\alpha\ ,\ \beta) \to M\ (1\ ,\ 6)$

$M\ (1\ ,\ 6)\in\varepsilon \Leftrightarrow 3\cdot 1 - 6 + 3 = 0 \Leftrightarrow 3 - 6 + 3 = 0$ ισχύει, άρα $\boldsymbol{M\in\varepsilon}$

γ) $\left.\begin{array}{l} 3x - 2y = -1 \\ 2x + 3y = 8 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} 9x - 6y = -3 \\ 4x + 6y = 16 \end{array}\right\} \overset{(+)}{\Rightarrow} 13x = 13 \Leftrightarrow x = 1$

$2x + 3y = 8 \overset{x=1}{\Rightarrow} 2 + 3y = 8 \Leftrightarrow 3y = 6 \Leftrightarrow y = 2$

$\Rightarrow \boldsymbol{\Gamma\ (1, 2)}$

Κελάφας
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

Κελάφας
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

ΘΕΜΑ 3ο

α) $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = |\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\cdot \text{συν}\frac{\pi}{3} = 3\cdot 2\cdot\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = 3}$

β) $\vec{\gamma} = \vec{\alpha} + \vec{\beta} \quad \Rightarrow \quad \vec{\gamma}^2 = (\vec{\alpha} + \vec{\beta})^2 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{\gamma}^2 = \vec{\alpha}^2 + 2\cdot\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + \vec{\beta}^2 \quad \Leftrightarrow$

$|\vec{\gamma}|^2 = |\vec{\alpha}|^2 + 2\cdot 3 + |\vec{\beta}|^2 \quad \Leftrightarrow \quad |\vec{\gamma}|^2 = 3^2 + 6 + 2^2 \quad \Leftrightarrow \quad |\vec{\gamma}|^2 = 19 \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{|\vec{\gamma}| = \sqrt{19}}$

γ) $(\vec{\alpha} + x\vec{\beta})\cdot(2\vec{\alpha} - x\vec{\beta}) = 17 \quad \Leftrightarrow \quad 2\vec{\alpha}^2 - x\cdot\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + 2x\cdot\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} - x^2\vec{\beta}^2 = 17 \quad \Leftrightarrow$

$2|\vec{\alpha}|^2 - x\cdot 3 + 2x\cdot 3 - x^2|\vec{\beta}|^2 = 17 \quad \Leftrightarrow \quad 2\cdot 3^2 - 3x + 6x - x^2\cdot 2^2 = 17 \quad \Leftrightarrow$

$18 + 3x - 4x^2 - 17 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -4x^2 + 3x + 1 = 0$

$\Delta = 25$ και $\boldsymbol{x = 1}$ (δεκτή) ή $\cancel{x = -\frac{1}{4}}$ (απορρίπτεται διότι $x > 0$)

ΘΕΜΑ 4ο

α) Οι συντεταγμένες του $O\,(0\,,0)$ επαληθεύουν την εξίσωση (1)

άρα **η γραμμή με εξίσωση (1) διέρχεται από το O (0 , 0)**.

β) $A^2 + B^2 - 4\Gamma = (-4)^2 + (-2\lambda)^2 - 4\cdot 0 = 4\lambda^2 + 16 > 0$, άρα η (1)

παριστάνει κύκλο με κέντρο $K\left(-\frac{A}{2}\,,-\frac{B}{2}\right) \rightarrow \boldsymbol{K\,(2\,,2\lambda)}$

και ακτίνα $\rho = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2} = \frac{\sqrt{4\lambda^2 + 16}}{2} = \frac{2\cdot\sqrt{\lambda^2 + 4}}{2} = \boldsymbol{\sqrt{\lambda^2 + 4}}$

γ) Για $\lambda = 2$: $C: x^2 + y^2 - 4x - 4y = 0$ (1)

$(1) \overset{y=0}{\underset{x'x}{\Rightarrow}} x^2 - 4x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x\cdot(x - 4) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$ ή $x = 4 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{A\,(4\,,0)}$

$(1) \overset{x=0}{\underset{y'y}{\Rightarrow}} y^2 - 4y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y\cdot(y - 4) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = 0$ ή $y = 4 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{B\,(0\,,4)}$

$(OA) = (OB) = 4$, άρα **το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισοσκελές**.

δ) $C: x^2 + y^2 - 4x - 4y = 0 \quad \Rightarrow \quad K\,(2\,,2)$ και $\rho = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

Η ευθεία $(\varepsilon): y = -x$ διέρχεται από το $O\,(0\,,0)$

$\varepsilon: x + y = 0$ και $d\,(K\,,\varepsilon) = \frac{|2+2|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{|4|}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} = \rho$,

άρα **η ευθεία (ε) εφάπτεται στον κύκλο C στο σημείο O (0 , 0)**.

Κελάφας
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ