

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ
ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 5 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2003

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

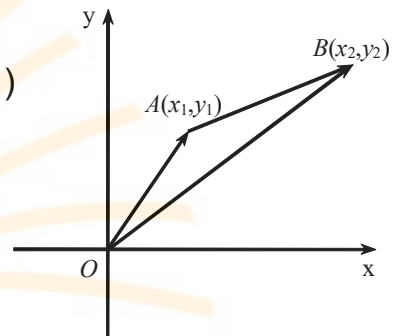
ΘΕΜΑ 1^ο

Α. Επειδή, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{AB} = (x, y)$, $\overrightarrow{OB} = (x_2, y_2)$

και $\overrightarrow{OA} = (x_1, y_1)$, έχουμε:

$$(x, y) = (x_2, y_2) - (x_1, y_1) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1).$$

Επομένως οι συντεταγμένες (x, y)
του διανύσματος με άκρα τα σημεία
 $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ δίνονται από
τις σχέσεις $x = x_2 - x_1$ και $y = y_2 - y_1$.



Β. 1 – Σ, 2 – Σ, 3 – Λ, 4 – Σ.

ΘΕΜΑ 2^ο

α) $\overrightarrow{BA} = (x_A - x_B, y_A - y_B) = (5 + 4, -3 - 9) \Rightarrow \overrightarrow{BA} = (9, -12)$

$\overrightarrow{BG} = (x_G - x_B, y_G - y_B) = (-1 + 4, 5 - 9) \Rightarrow \overrightarrow{BG} = (3, -4)$

β) $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA} = -(9, -12) = (-9, 12)$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-9)^2 + 12^2} = \sqrt{81 + 144} = \sqrt{225} \Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = 15$$

$\overrightarrow{AG} = (x_G - x_A, y_G - y_A) = (-1 - 5, 5 + 3) = (-6, 8)$

$$|\overrightarrow{AG}| = \sqrt{(-6)^2 + 8^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} \Rightarrow |\overrightarrow{AG}| = 10$$

γ) $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AG}) = \begin{vmatrix} -9 & 12 \\ -6 & 8 \end{vmatrix} = -9 \cdot 8 - (-6) \cdot 12 = -72 + 72 = 0,$

άρα $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{AG}$, δηλαδή τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά.

ΘΕΜΑ 3^ο

$$\alpha) (x-1)^2 - (y+2)^2 = 0 \Leftrightarrow [(x-1) + (y+2)] \cdot [(x-1) - (y+2)] = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x-1+y+2) \cdot (x-1-y-2) = 0 \Leftrightarrow (x+y+1) \cdot (x-y-3) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\mathbf{x+y+1=0 \quad \text{ή} \quad \mathbf{x-y-3=0} \rightarrow \text{(ευθείες } (\epsilon_1) \text{ και } (\epsilon_2) \text{ αντίστοιχα)}$$

$$\beta) \left. \begin{array}{l} (\epsilon_1) : y = -x - 1, \text{ άρα } \lambda_{\epsilon_1} = -1 \\ (\epsilon_2) : y = x - 3, \text{ άρα } \lambda_{\epsilon_2} = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda_{\epsilon_1} \cdot \lambda_{\epsilon_2} = -1 \Leftrightarrow \epsilon_1 \perp \epsilon_2$$

$$\gamma) \left. \begin{array}{l} y = -x - 1 \\ y = x - 3 \end{array} \right\} \Rightarrow x - 3 = -x - 1 \Leftrightarrow 2x = 2 \Leftrightarrow x = 1$$

$$y = x - 3 \xrightarrow{x=1} y = 1 - 3 \Leftrightarrow y = -2$$

Επομένως το σημείο τομής των ϵ_1 και ϵ_2 είναι το $M(1, -2)$.

ΘΕΜΑ 4^ο

$$\alpha) \rho = (OK) = \sqrt{(2-0)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$$

$$C : (x - x_K)^2 + (y - y_K)^2 = R^2 \Rightarrow C : (x - 2)^2 + (y - 2)^2 = \sqrt{8}^2 \Leftrightarrow$$

$$C : (x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 8 \Leftrightarrow C : x^2 - 4x + 4 + y^2 - 4y + 4 - 8 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\mathbf{C : x^2 + y^2 - 4x - 4y = 0}$$

$$\beta) (KB) = \sqrt{(0-2)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = \rho, \text{ άρα } \mathbf{B \in C}$$

$$(ΚΓ) = \sqrt{(2+2\sqrt{2}-2)^2 + (\cancel{2-2})^2} = \sqrt{(2\sqrt{2})^2} = \sqrt{8} = \rho, \text{ άρα } \mathbf{\Gamma \in C}$$

$$\left. \begin{array}{l} (ΟΓ) = \sqrt{(2+2\sqrt{2}-0)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{4+8\sqrt{2}+8+4} = \sqrt{16+8\sqrt{2}} \\ (ΒΓ) = \sqrt{(2+2\sqrt{2}-0)^2 + (2-4)^2} = \sqrt{4+8\sqrt{2}+8+4} = \sqrt{16+8\sqrt{2}} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$(ΟΓ) = (ΒΓ), \text{ άρα } \mathbf{\overset{\Delta}{ΟΒΓ} \text{ ισοσκελές.}}$$

$$\gamma) (\epsilon) : x - y - 4 = 0$$

$$d(K, \epsilon) = \frac{|x_K - y_K - 4|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|2 - 2 - 4|}{\sqrt{1+1}} = \frac{|-4|}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} = \sqrt{8} = \rho$$

άρα η ευθεία (ϵ) εφάπτεται στον κύκλο C .

Οι συντεταγμένες του $B(0, 4)$ επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας (ϵ)

επομένως το B είναι το σημείο επαφής του C με την εφαπτομένη του (ϵ) .