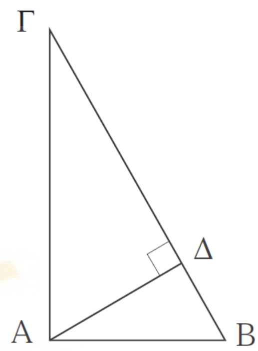
ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ
ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΕΤΑΡΤΗ 2 ΙΟΥΝΙΟΥ 2004
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Έχουμε: $AB^2 = B\Gamma \cdot B\Delta$ και $A\Gamma^2 = B\Gamma \cdot \Gamma\Delta$.

Με πρόσθεση των ισοτήτων κατά μέλη προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} AB^2 + A\Gamma^2 &= B\Gamma \cdot B\Delta + B\Gamma \cdot \Gamma\Delta \\ &= B\Gamma(B\Delta + \Gamma\Delta) \\ &= B\Gamma \cdot B\Gamma \\ &= B\Gamma^2. \end{aligned}$$



Β. Σ
Γ. Λ
Δ. Σ
Ε. Λ
ΣΤ. Σ

ΘΕΜΑ 2ο

α. $\left.\begin{aligned} AB^2 &= 15^2 = 225 \\ A\Delta^2 + \Delta B^2 &= 12^2 + 9^2 = 144 + 81 = 225 \end{aligned}\right\} \Rightarrow AB^2 = A\Delta^2 + \Delta B^2$, άρα

το $AB\Delta$ είναι ορθογώνιο με $\hat{\Delta} = 90^0$, άρα **το $A\Delta$ είναι ύψος του $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$**

β. $AB^2 = B\Gamma \cdot B\Delta \Rightarrow 225 = B\Gamma \cdot 9 \Leftrightarrow$ $\mathbf{B\Gamma = 25}$

$A\Gamma^2 = B\Gamma^2 - AB^2 = 25^2 - 225 = 625 - 225 = 400 = 20^2$, άρα $\mathbf{A\Gamma = 20}$

γ. 2^o θεώρημα διαμέσων : $A\Gamma^2 - AB^2 = 2 \cdot B\Gamma \cdot M\Delta \Rightarrow$

$400 - 225 = 2 \cdot 25 \cdot M\Delta \Leftrightarrow 175 = 50 M\Delta \Leftrightarrow M\Delta = \dfrac{175}{50} \Leftrightarrow M\Delta = \dfrac{7}{2}$

άρα **η προβολή της διαμέσου ΑΜ στην υποτείνουσα ΒΓ είναι $\mathbf{\dfrac{7}{2}}$**

$(AM\Delta) = \dfrac{1}{2} \cdot M\Delta \cdot A\Delta = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{7}{2} \cdot 12 \Rightarrow$ $\mathbf{(AM\Delta) = 21}$

ΘΕΜΑ 3ο

α. $\left.\begin{array}{l} MB^2 - AB^2 = MA^2 \\ MP \cdot MB = MA^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{MB^2 - AB^2 = MP \cdot MB} \quad (1)$

β. $\left.\begin{array}{l} NB^2 - AB^2 = NA^2 \\ NP \cdot NB = NA^2 \end{array}\right\} \Rightarrow NB^2 - AB^2 = NP \cdot NB \quad (2)$

$(1),(2) \overset{(-)}{\Rightarrow} MB^2 \cancel{-AB^2} - NB^2 \cancel{+AB^2} = MP \cdot MB - NP \cdot NB \Leftrightarrow$

$\mathbf{MB^2 - NB^2 = MP \cdot MB - NP \cdot NB}$

γ. $MB^2 = AB^2 + MA^2 = (2R)^2 + R^2 = 4R^2 + R^2 = 5R^2 \Rightarrow MB = R\sqrt{5}$

$MP \cdot MB = MA^2 \Rightarrow MP \cdot R\sqrt{5} = R^2 \Leftrightarrow MP = \dfrac{R}{\sqrt{5}} \Rightarrow MP^2 = \dfrac{R^2}{5} \quad (3)$

$BN^2 = AB^2 + NA^2 = (2R)^2 + (2R)^2 = 4R^2 + 4R^2 = 8R^2 \Rightarrow BN = 2R\sqrt{2}$

$AB = AN = 2R$, άρα ABN ορθογώνιο και ισοσκελές,

άρα AK διάμεσος και ύψος, άρα $NK = \dfrac{BN}{2} = R\sqrt{2} \Rightarrow NK^2 = 2R^2 \quad (4)$

$\dfrac{NK^2}{MP^2} \overset{(3)}{\underset{(4)}{=}} \dfrac{2R^2}{\frac{R^2}{5}} = \dfrac{10R^2}{R^2} \Rightarrow \mathbf{\dfrac{NK^2}{MP^2} = 10}$

ΘΕΜΑ 4ο

α. Στο ορθογώνιο MOB είναι $OM = \dfrac{OB}{2}$, άρα $\hat{B} = 30^0 \Rightarrow \mathbf{M\hat{O}N = 60^0 = \omega_6}$

$E_{\text{κυκλ.τομ.}O\overset{\frown}{MN}} = \dfrac{\pi \cdot 12^2 \cdot 60}{360} = \dfrac{\pi \cdot 144}{6} \Rightarrow \mathbf{E_{\text{κυκλ.τομ.}O\overset{\frown}{MN}} = 24\pi}$

β. Στο ορθογώνιο $\overset{\Delta}{OM\Gamma}$: $M\hat{O}\Gamma = 30^0$, άρα $M\Gamma = x$ και $O\Gamma = 2x$

$OM^2 = O\Gamma^2 - M\Gamma^2 \Leftrightarrow 12^2 = (2x)^2 - x^2 \Leftrightarrow 144 = 3x^2 \Leftrightarrow$

$x^2 = 48 \Rightarrow x = \sqrt{48} \Leftrightarrow x = 4\sqrt{3}$, άρα $O\Gamma = 2x = 8\sqrt{3}$

$(OB\Gamma) = \dfrac{1}{2} \cdot OB \cdot O\Gamma = \dfrac{1}{2} \cdot 24 \cdot 8\sqrt{3} = 96\sqrt{3}$

$E_{\text{τεταρτοκυκλίου}} = \dfrac{\pi \cdot 12^2}{4} = \dfrac{144\pi}{6} = 36\pi$

$E_{\text{γραμμ.}} = (OB\Gamma) - E_{\text{τεταρτοκυκλίου}} = 96\sqrt{3} - 36\pi \Rightarrow \mathbf{E_{\text{γραμμ.}} = 12(8\sqrt{3} - 3\pi)}$