ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ ΚΑΙ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ ΠΟΥ ΥΠΗΡΕΤΟΥΝ ΣΤΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ

ΤΡΙΤΗ 10 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2024

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 105

Έστω $f(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$. Αν x_0 είναι ένα σημείο του $\mathbb{R}$,

τότε για $x \neq x_0$ ισχύει: $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \dfrac{x - x_0}{x - x_0} = 1$.

Επομένως, $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} 1 = 1$,

δηλαδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = 1$.

Α2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 31

Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f\, x_2)$.

Α3. Σχολικό βιβλίο σελίδα 77

Θεώρημα Μέγιστης και Ελάχιστης Τιμής

Αν f είναι συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha, \beta]$, τότε η f παίρνει στο $[\alpha, \beta]$ μια μέγιστη τιμή M και μια ελάχιστη τιμή m.

Α4. **α.** Σωστό, **β.** Λάθος, **γ.** Σωστό, **δ.** Σωστό, **ε.** Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. $D_f = (0, +\infty)$, $D_g = \mathbb{R}$

$D_h = D_{fog} = \{x \in D_g \text{ και } g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} \text{ και } x - 2 > 0\}$

$= \{x \in \mathbb{R} \text{ και } x > 2\} = (2, +\infty)$

$h(x) = (fog)(x) = f(g(x)) = f(x - 2) = 2\ln(x - 2) - 1$

Επομένως $\boxed{\mathbf{h(x) = 2\ln(x - 2) - 1,\ x > 2}}$.

Β2. $h'(x) = [2\ell n(x-2)-1]' = 2[\ell n(x-2)]' = 2\cdot\dfrac{(x-2)'}{x-2} = \dfrac{2}{x-2},\ x>2$

$$h''(x) = \left(\frac{2}{x-2}\right)' = -\frac{2}{(x-2)^2},\ x>2$$

Είναι $h''(x)<0$, για κάθε $x>2$, άρα **η h είναι κοίλη στο $(2,+\infty)$.**

Β3. **1^{ος} τρόπος**

$h'(x) = \dfrac{2}{x-2} > 0$, για $x>2$,

άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο $(2,+\infty)$, άρα η h είναι 1-1,

άρα $\boxed{\textbf{η h αντιστρέφεται}}$.

2^{ος} τρόπος

$h(x_1) = h(x_2) \Leftrightarrow 2\ell n(x_1-2)-1 = 2\ell n(x_2-2)-1 \Leftrightarrow$
$2\ell n(x_1-2) = 2\ell n(x_2-2) \Leftrightarrow \ell n(x_1-2) = \ell n(x_2-2) \Leftrightarrow$
$x_1-2 = x_2-2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$, άρα η h είναι 1-1,

άρα $\boxed{\textbf{η h αντιστρέφεται}}$.

3^{ος} τρόπος

$x_1 > x_2 > 2 \Leftrightarrow x_1-2 > x_2-2 > 0 \overset{\ell nx\uparrow}{\Leftrightarrow} \ell n(x_1-2) > \ell n(x_2-2) \Leftrightarrow$
$2\ell n(x_1-2) > 2\ell n(x_2-2) \Leftrightarrow 2\ell n(x_1-2)-1 > 2\ell n(x_2-2)-1 \Leftrightarrow$
$h(x_1) > h(x_2)$, άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο $(2,+\infty)$,
άρα η h είναι 1-1, άρα $\boxed{\textbf{η h αντιστρέφεται}}$.

4^{ος} τρόπος

Για $x_1, x_2 \in (2,+\infty)$ έχουμε :

$x_1 \neq x_2 \Rightarrow x_1-2 \neq x_2-2 \overset{\ell nx\ 1\text{-}1}{\Rightarrow} \ell n(x_1-2) \neq \ell n(x_2-2) \Rightarrow$
$2\ell n(x_1-2) \neq 2\ell n(x_2-2) \Rightarrow 2\ell n(x_1-2)-1 \neq 2\ell n(x_2-2)-1 \Rightarrow$
$h(x_1) \neq h(x_2)$, άρα η h είναι 1-1,

άρα $\boxed{\textbf{η h αντιστρέφεται}}$.

Εύρεση της αντίστροφης της h

1ος τρόπος (γνωρίζοντας ότι η h είναι ↑)

$$\left.\begin{aligned} &\bullet \lim_{x\to 2^+} h(x) = \lim_{x\to 2^+}[2\ln(x-2)-1] = \lim_{u\to 0^+}(2\ln u - 1) = -\infty \\ &\bullet \lim_{x\to +\infty} h(x) = \lim_{x\to +\infty}[2\ln(x-2)-1] = \lim_{u\to +\infty}(2\ln u - 1) = +\infty \end{aligned}\right\} \Rightarrow h(A) = \mathbb{R}$$

$D_{h^{-1}} = h(A) = \mathbb{R}$

Για $x > 2$, $y \in \mathbb{R}$ έχουμε :

$y = h(x) \Leftrightarrow y = 2\ln(x-2) - 1 \Leftrightarrow y + 1 = 2\ln(x-2) \Leftrightarrow$

$\dfrac{y+1}{2} = \ln(x-2) \Leftrightarrow e^{\frac{y+1}{2}} = x - 2 \Leftrightarrow x = 2 + e^{\frac{y+1}{2}}$, $y \in \mathbb{R}$

Επομένως $\mathbf{h^{-1}(x) = 2 + e^{\frac{x+1}{2}}}$, $\mathbf{x \in \mathbb{R}}$.

2ος τρόπος (χωρίς να γνωρίζουμε τη μονοτονία της h)

$y = h(x) \Leftrightarrow y = 2\ln(x-2) - 1 \Leftrightarrow y + 1 = 2\ln(x-2) \Leftrightarrow$

$\dfrac{y+1}{2} = \ln(x-2) \Leftrightarrow e^{\frac{y+1}{2}} = x - 2 \Leftrightarrow x = 2 + e^{\frac{y+1}{2}}$, $y \in \mathbb{R}$

Πρέπει $x \in D_h \Leftrightarrow e^{\frac{y+1}{2}} + 2 > 2 \Leftrightarrow e^{\frac{y+1}{2}} > 0$ που ισχύει

Επομένως $\mathbf{h^{-1}(x) = 2 + e^{\frac{x+1}{2}}}$, $\mathbf{x \in \mathbb{R}}$.

B4. $\varphi(x) = (h^{-1}(x) - 3)\cdot(x^3 - 8) = \left(e^{\frac{x+1}{2}} - 1\right)\cdot(x^3 - 8)$, $x \in \mathbb{R}$

- η φ είναι συνεχής στο $[-1, 2]$ ως πράξεις συνεχών
- η φ είναι παραγωγίσιμη στο $(-1, 2)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων
- $\varphi(-1) = \varphi(2) = 0$

άρα

ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θ.Rolle για την φ στο [-1, 2].

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Για $x \in [0\,,\,3]$ είναι $f'(x) = \left(\dfrac{x}{e^x}\right)' = \dfrac{e^x - x \cdot e^x}{(e^x)^2} = \dfrac{e^x \cdot (1-x)}{(e^x)^2} = \dfrac{1-x}{e^x}$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1-x}{e^x} = 0 \Leftrightarrow 1-x=0 \Leftrightarrow x=1$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{1-x}{e^x} > 0 \Leftrightarrow 1-x>0 \overset{x\in[0\,,\,3]}{\Leftrightarrow} 0 \le x < 1$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{1-x}{e^x} < 0 \Leftrightarrow 1-x<0 \overset{x\in[0\,,\,3]}{\Leftrightarrow} 1 < x \le 3$$

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0\,,1]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[1\,,3]$

Είναι $f(1) = \dfrac{1}{e}$, $f(0) = 0$ και $f(3) = \dfrac{3}{e^3} > 0$

Η f παρουσιάζει τοπικό και ολικό ελάχιστο για $x = 0$ την τιμή $f(0) = 0$, τοπικό και ολικό μέγιστο για $x = 1$ την τιμή $f(1) = \dfrac{1}{e}$ και τέλος παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο για $x = 3$ την τιμή $f(3) = \dfrac{3}{e^3}$.

Γ2. Για $x \in [0\,,\,3]$ είναι :

$$f''(x) = \left(\frac{1-x}{e^x}\right)' = \frac{-e^x - (1-x)\cdot e^x}{(e^x)^2} = \frac{e^x \cdot (x-2)}{(e^x)^2} = \frac{x-2}{e^x}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x-2}{e^x} = 0 \Leftrightarrow x-2=0 \Leftrightarrow x=2$$

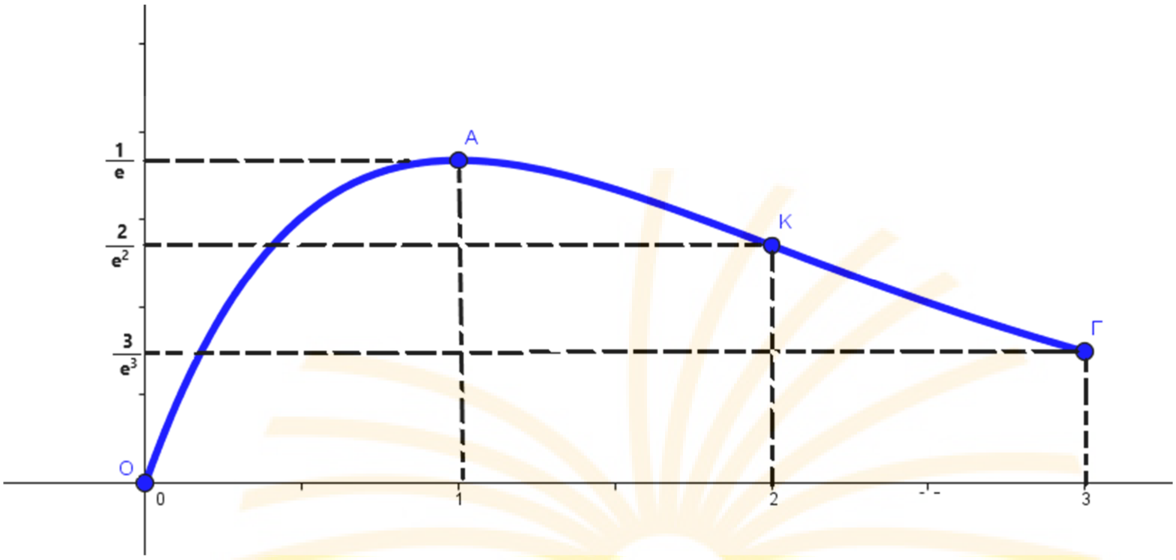
$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{x-2}{e^x} > 0 \Leftrightarrow x-2>0 \overset{x\in[0\,,\,3]}{\Leftrightarrow} 2 < x \le 3$$

$$f''(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{x-2}{e^x} < 0 \Leftrightarrow x-2<0 \overset{x\in[0\,,\,3]}{\Leftrightarrow} 0 \le x < 2$$

Η f είναι κοίλη στο $[0\,,2]$ και κυρτή στο $[2\,,3]$

Είναι $f(2) = \dfrac{2}{e^2}$, άρα **η C_f έχει σημείο καμπής το $K\left(2\,,\dfrac{2}{e^2}\right)$**

Γ3.



Γ4. Είναι $f(x) \geq 0$ στο διάστημα $[0, 1]$, άρα

$$E = \int_0^1 f(x)\,dx$$
$$= \int_0^1 \frac{x}{e^x}\,dx$$
$$= \int_0^1 x \cdot e^{-x}\,dx$$
$$= \int_0^1 x \cdot \left(-e^{-x}\right)'\,dx$$
$$= \left[-x \cdot e^{-x}\right]_0^1 - \int_0^1 (x)' \cdot \left(-e^{-x}\right)\,dx$$
$$= -e^{-1} + 0 - \int_0^1 -e^{-x}\,dx$$
$$= -\frac{1}{e} - \left[e^{-x}\right]_0^1 = -\frac{1}{e} - \left(\frac{1}{e} - 1\right)$$
$$= -\frac{1}{e} - \frac{1}{e} + 1$$
$$= \boldsymbol{\left(1 - \frac{2}{e}\right) \text{τ.μ.} = \frac{e-2}{e} \text{τ.μ.}}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$ (ως παραγωγίσιμη)

$$\left.\begin{aligned} &\bullet \lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-}(e^{x+1} + \lambda x) = 1 - \lambda \\ &\bullet \lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^-}\frac{\alpha x + \alpha}{x + \alpha} = 0 \\ &\bullet f(-1) = \frac{\alpha\cdot(-1) + \alpha}{-1 + \alpha} = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 1 - \lambda = 0 \Leftrightarrow \boxed{\lambda = 1}$$

Δ2. Για $\lambda = 1$ είναι $f(x) = \begin{cases} e^{x+1} + x, & x < -1 \\ \dfrac{\alpha\cdot(x+1)}{x+\alpha}, & x \geq -1 \end{cases}$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$

$$\left.\begin{aligned} &\bullet \lim_{x\to -1^-}\frac{f(x) - \cancel{f(-1)}}{x - (-1)} = \lim_{x\to -1^-}\frac{e^{x+1} + x}{x+1} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{DL'H}{=}} \lim_{x\to -1^-}\frac{e^{x+1} + 1}{1} = 2 \\ &\bullet \lim_{x\to -1^+}\frac{f(x) - \cancel{f(-1)}}{x - (-1)} = \lim_{x\to -1^-}\frac{\frac{\alpha(x+1)}{x+\alpha}}{x+1} = \lim_{x\to -1^-}\frac{\alpha}{x+\alpha} = \frac{\alpha}{\alpha - 1} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\frac{\alpha}{\alpha - 1} = 2 \Leftrightarrow 2\alpha - 2 = \alpha \Leftrightarrow \boxed{\alpha = 2}.$$

$$f'(-1) = \lim_{x\to -1^-}\frac{f(x) - \cancel{f(-1)}}{x - (-1)} = 2$$

ε : η εφαπτομένη της C_f στο Α (-1 , 0)

$\varepsilon : y - f(-1) = f'(-1)\cdot(x+1) \Leftrightarrow$

$\varepsilon : y - 0 = 2\cdot(x+1) \Leftrightarrow$

$\boxed{\varepsilon : y = 2x + 2}$

Δ3. • Κατακόρυφες ασύμπτωτες

Η f είναι συνεχής στο IR άρα η C_f δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες

• Πλάγιες / οριζόντιες ασύμπτωτες

▷ στο $-\infty$: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^{x+1}+x}{x} \overset{\left(\frac{-\infty}{-\infty}\right)}{\underset{DL'H}{=}} \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^{x+1}+1}{1} = 1$

$\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-x] = \lim\limits_{x\to-\infty}(e^{x+1}+x-x) \overset{\left(\frac{-\infty}{-\infty}\right)}{\underset{DL'H}{=}} \lim\limits_{x\to-\infty} e^{x+1} = 0$

άρα **η C_f έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $-\infty$ την $y = x$.**

▷ στο $+\infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+2}{x+2} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{x} = 2$

άρα **η C_f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την $y = 2$.**

Δ4. Είναι $-1 \le ημx \le 1 \iff -3 \le ημx - 2 \le -1$

1ος τρόπος

Για $x < -1$ είναι :

$f'(x) = (e^{x+1}+x)' = e^{x+1}+1$ και $f''(x) = (e^{x+1}+1)' = e^{x+1} > 0$

Η f είναι κυρτή το $(-\infty, -1]$ και η C_f βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη της (ε) με εξαίρεση το σημείο επαφής A (-1 , 0), άρα $f(x) \ge 2x+2$, για κάθε $x \le -1$.

Είναι $f(t) \ge 2t+2 \overset{t = ημx-2\le-1}{\iff} f(ημx-2) \ge 2(ημx-2)+2 \iff$

$f(ημx-2) \ge 2ημx - 4 + 2 \iff$ **$f(ημx-2) \ge 2ημx - 2,\ x \in IR$.**

2ος τρόπος

Θεωρούμε τη συνάρτηση g, με $g(x) = f(ημx-2) - 2ημx + 2,\ x \in IR$.

$g(x) = f(ημx-2) - 2ημx + 2 \overset{ημx-2\le-1}{=} e^{ημx-2+1} + ημx - 2 - 2ημx + 2 = e^{ημx-1} - ημx$

Για $u \in IR$ είναι $e^u \ge u+1 \overset{u=ημx-1}{\Rightarrow} e^{ημx-1} \ge ημx \iff g(x) \ge 0 \iff$

$f(ημx-2) - 2ημx + 2 \ge 0 \iff$ **$f(ημx-2) \ge 2ημx - 2,\ x \in IR$.**

Αρκεί να δείξουμε ότι : $\dfrac{\pi}{4} < \dfrac{\sqrt{2}\cdot[f(\alpha)-2]-\dfrac{\pi^2}{48}}{f(\alpha)-2-\dfrac{\pi}{12}} < \sqrt{2}$

- $\dfrac{\pi}{4} < \dfrac{\sqrt{2}\cdot[f(\alpha)-2]-\dfrac{\pi^2}{48}}{f(\alpha)-2-\dfrac{\pi}{12}} \overset{f(\alpha)-2-\frac{\pi}{12}<0}{\Leftrightarrow} \dfrac{\pi}{4}\cdot[f(\alpha)-2]-\cancel{\dfrac{\pi^2}{48}} > \sqrt{2}\cdot[f(\alpha)-2]-\cancel{\dfrac{\pi^2}{48}} \Leftrightarrow$

  $\dfrac{\pi}{4}\cdot[f(\alpha)-2] > \sqrt{2}\cdot[f(\alpha)-2] \overset{f(\alpha)-2<0}{\Leftrightarrow} \dfrac{\pi}{4} < \sqrt{2}$, που ισχύει

- $\dfrac{\sqrt{2}\cdot[f(\alpha)-2]-\dfrac{\pi^2}{48}}{f(\alpha)-2-\dfrac{\pi}{12}} < \sqrt{2} \overset{f(\alpha)-2-\frac{\pi}{12}<0}{\Leftrightarrow} \cancel{\sqrt{2}\cdot[f(\alpha)-2]}-\dfrac{\pi^2}{48} > \cancel{\sqrt{2}\cdot[f(\alpha)-2]}-\dfrac{\pi\sqrt{2}}{12} \Leftrightarrow$

  $-\dfrac{\pi^2}{48} > -\dfrac{\pi\sqrt{2}}{12} \Leftrightarrow \dfrac{\pi}{4} < \sqrt{2}$, που ισχύει

Επομένως **η εξίσωση έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα** $\left(\dfrac{\pi}{4}, \sqrt{2}\right)$

Δ4. i) Για κάθε $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right]$:

$$H'(x) = \left[\frac{1}{2}\ell n(1-\sigma\upsilon\nu x)-\frac{1}{2}\ell n(1+\sigma\upsilon\nu x)\right]' = \frac{1}{2}[\ell n(1-\sigma\upsilon\nu x)]'-\frac{1}{2}[\ell n(1+\sigma\upsilon\nu x)]'$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{(1-\sigma\upsilon\nu x)'}{1-\sigma\upsilon\nu x}-\frac{1}{2}\cdot\frac{(1+\sigma\upsilon\nu x)'}{1+\sigma\upsilon\nu x} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\eta\mu x}{1-\sigma\upsilon\nu x}-\frac{1}{2}\cdot\frac{-\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu x}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\eta\mu x\cdot\left(\frac{1}{1-\sigma\upsilon\nu x}+\frac{1}{1+\sigma\upsilon\nu x}\right) = \frac{1}{2}\cdot\eta\mu x\cdot\frac{1+\cancel{\sigma\upsilon\nu x}+1-\cancel{\sigma\upsilon\nu x}}{(1-\sigma\upsilon\nu x)(1+\sigma\upsilon\nu x)}$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\eta\mu x\cdot\frac{\cancel{2}}{1-\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{\eta\mu x}{1-\sigma\upsilon\nu^2 x} = h(x)$$

άρα **η H είναι μια παράγουσα της h στο διάστημα** $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

ii) Είναι $h(x) = \dfrac{\eta\mu x}{1 - \sigma\upsilon\nu^2 x} = \dfrac{\eta\mu x}{\eta\mu^2 x} = \dfrac{1}{\eta\mu x} = f(x),\ x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right]$

$$f(x) = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{\eta\mu x} = 2 \Leftrightarrow \eta\mu x = \frac{1}{2} \overset{x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]}{\Leftrightarrow} x = \frac{\pi}{6}$$

Αναζητώ το πρόσημο της $q(x) = f(x) - 2$, στο $\left[\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{2}\right]$

$$\frac{\pi}{6} \le x \le \frac{\pi}{2} \overset{f\downarrow}{\Rightarrow} f\left(\frac{\pi}{6}\right) \ge f(x) \ge f\left(\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow 2 \ge f(x) \ge 1 \Rightarrow 0 \ge q(x)$$

$$E = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} |q(x)|\,dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} -q(x)\,dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} [2 - f(x)]\,dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} 2\,dx - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx$$

$$= [2x]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} - [H(x)]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \pi - \frac{\pi}{3} - \cancel{H\left(\frac{\pi}{2}\right)} + H\left(\frac{\pi}{6}\right) = \left(\boldsymbol{\frac{2\pi}{3} + \ell n(2 - \sqrt{3})}\right) \textbf{τ.μ.}$$

διότι

- $H\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{1}{2}\ell n\left(1 - \cancel{\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{2}}\right) - \dfrac{1}{2}\ell n\left(1 + \cancel{\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{2}}\right) = \dfrac{1}{2}\ell n 1 - \dfrac{1}{2}\ell n 1 = 0$
- $H\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{1}{2}\ell n\left(1 - \sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{6}\right) - \dfrac{1}{2}\ell n\left(1 + \sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{6}\right)$

$$= \frac{1}{2}\ell n\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{1}{2}\ell n\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\ell n\frac{2 - \sqrt{3}}{2} - \ell n\frac{2 + \sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{2}\ell n\frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}$$

$$= \frac{1}{2}\ell n\frac{(2 - \sqrt{3})^2}{(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})} = \frac{1}{2}\ell n\frac{(2 - \sqrt{3})^2}{1}$$

$$= \frac{1}{2}\ell n(2 - \sqrt{3})^2 = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot \ell n(2 - \sqrt{3}) = \ell n(2 - \sqrt{3})$$