ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ ΚΑΙ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ ΠΟΥ ΥΠΗΡΕΤΟΥΝ ΣΤΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ

ΤΕΤΑΡΤΗ 10 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2025

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 99

Για να δείξουμε ότι η f είναι συνεχής στο σημείο x_0, αρκεί να δείξουμε ότι $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ ή $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x) - f(x_0)] = 0$.

Για $x \neq x_0$ έχουμε :

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\cdot(x - x_0),\quad \text{οπότε}$$

$$\lim_{x\to x_0} [f(x) - f(x_0)] = \lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\cdot(x - x_0)\right]$$

$$= \lim_{x\to x_0}\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\cdot\lim_{x\to x_0}(x - x_0) = f'(x_0)\cdot 0 = 0$$

αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

Επομένως $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ δηλαδή η f είναι συνεχής στο x_0.

Α2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 143

Κρίσιμα σημεία μιας συνάρτησης f στο διάστημα Δ, είναι τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f δεν παραγωγίζεται ή η παράγωγός της είναι ίση με μηδέν.

Α3. Σχολικό βιβλίο σελίδες 128 - 129

Θεώρημα Μέσης Τιμής Διαφορικού Λογισμού (Θ.Μ.Τ.)

Αν μια συνάρτηση f είναι:

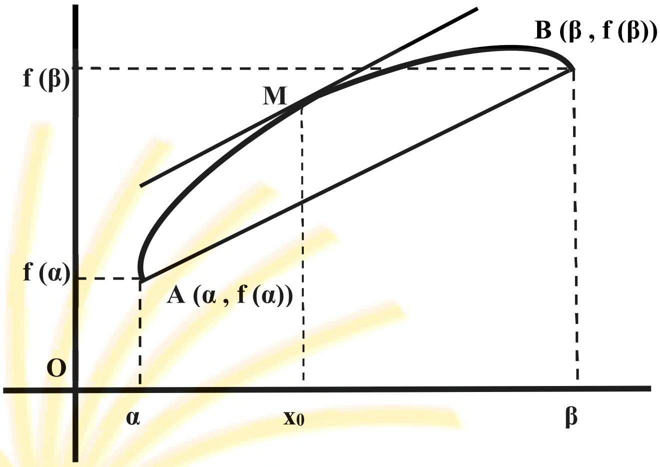
- συνεχής στο κλειστό διάστημα [α , β] και
- παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α , β)

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε :

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}.$$

<u>Γεωμετρική Ερμηνεία Θ.Μ.Τ.</u>

Αν η C_f είναι μια συνεχής γραμμή από το $A\,(\alpha\,,\,f\,(\alpha))$ στο $B\,(\beta\,,\,f\,(\beta))$ και η f είναι παραγωγίσιμη στο $(\alpha\,,\,\beta)$, τότε υπάρχει μια τουλάχιστον εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M\,(x_0\,,\,f\,(x_0))$ που είναι παράλληλη στην ευθεία AB, με $x_0 \in (\alpha\,,\,\beta)$.



Α4. **α.** Σωστό, **β.** Σωστό, **γ.** Λάθος, **δ.** Σωστό, **ε.** Λάθος.

ΘΕΜΑ Β

Β1. $D_f = (0\,,\,+\infty)$, $D_g = \mathbb{IR}$

$$D_{fog} = \{\, x \in D_g \;\text{ και }\; g\,(x) \in D_f \,\} = \{\, x \in \mathbb{IR} \;\text{ και }\; \underbrace{e^x + 1 > 0}_{\text{ΙΣΧΥΕΙ}} \,\} = \mathbb{IR}$$

$$(fog)\,(x) = f\,(g\,(x)) = f\,(e^x + 1) = \ell n(e^x + 1)$$

Επομένως $\boxed{\mathbf{(fog)\,(x) = \ell n(e^x + 1),\;\; x \in IR}}$.

Β2. **1^{ος} τρόπος**

$$(fog)'(x) = \left[\ell n(e^x + 1)\right]' = \frac{(e^x + 1)'}{e^x + 1} = \frac{e^x}{e^x + 1} > 0$$

άρα η fog είναι γνησίως αύξουσα στο IR, άρα η fog είναι 1-1,

άρα $\boxed{\text{η fog είναι αντιστρέψιμη}}$.

2^{ος} τρόπος

$$(fog)\,(x_1) = (fog)\,(x_2) \;\Leftrightarrow\; \ell n(e^{x_1} + 1) = \ell n(e^{x_2} + 1) \;\Leftrightarrow$$

$e^{x_1} + 1 = e^{x_2} + 1 \;\Leftrightarrow\; e^{x_1} = e^{x_2} \;\Leftrightarrow\; x_1 = x_2$, άρα η fog είναι 1-1,

άρα $\boxed{\text{η fog είναι αντιστρέψιμη}}$.

3ος τρόπος

$x_1 > x_2 \overset{e^x \uparrow}{\Leftrightarrow} e^{x_1} > e^{x_2} \Leftrightarrow e^{x_1} + 1 > e^{x_2} + 1 \overset{\ell nx \uparrow}{\Leftrightarrow}$

$\ell n(e^{x_1} + 1) > \ell n(e^{x_2} + 1) \Leftrightarrow (fog)(x_1) > (fog)(x_2)$,

άρα η fog είναι γνησίως αύξουσα στο IR, άρα η fog είναι 1-1,

άρα $\boxed{\text{η fog είναι αντιστρέψιμη}}$.

4ος τρόπος

Για $x_1, x_2 \in IR$ έχουμε :

$x_1 \neq x_2 \overset{e^x\ 1\text{-}1}{\Rightarrow} e^{x_1} \neq e^{x_2} \Leftrightarrow e^{x_1} + 1 \neq e^{x_2} + 1 \overset{\ell nx\ 1\text{-}1}{\Rightarrow}$

$\ell n(e^{x_1} + 1) \neq \ell n(e^{x_2} + 1) \Leftrightarrow (fog)(x_1) \neq (fog)(x_2)$,

άρα η fog είναι 1-1, άρα $\boxed{\text{η fog είναι αντιστρέψιμη}}$.

Εύρεση της αντίστροφης της fog

1ος τρόπος (γνωρίζοντας ότι η fog είναι ↑)

$$\left.\begin{array}{l} \bullet \lim\limits_{x\to-\infty}(fog)(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\ell n(e^x + 1) \underset{\lim\limits_{x\to-\infty}(e^x+1)=1}{\overset{e^x+1=u}{=}} \lim\limits_{u\to1}\ell nu = 0 \\ \bullet \lim\limits_{x\to+\infty}(fog)(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\ell n(e^x + 1) \underset{\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x+1)=+\infty}{\overset{e^x+1=u}{=}} \lim\limits_{u\to+\infty}\ell nu = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$D_h = (gof)(IR) = (0\ ,\ +\infty)$

Για $x \in IR$ και $y > 0$ έχουμε : $y = (fog)(x) \Leftrightarrow y = \ell n(e^x + 1) \Leftrightarrow$

$e^y = e^x + 1 \Leftrightarrow e^x = e^y - 1 \Leftrightarrow x = \ell n(e^y - 1),\ y > 0$

Επομένως $\mathbf{h(x) = \ell n(e^x - 1),\ x > 0}$.

2ος τρόπος (χωρίς να γνωρίζουμε τη μονοτονία της fog)

$y = (fog)(x) \Leftrightarrow y = \ell n(e^x + 1) \Leftrightarrow e^y = e^x + 1 \Leftrightarrow e^x = e^y - 1$

$\boxed{\text{Πρέπει } e^y - 1 > 0 \Leftrightarrow e^y > 1 \Leftrightarrow e^y > e^0 \Leftrightarrow \mathbf{y > 0}}$

άρα $\ell ne^x = \ell n(e^y - 1) \Leftrightarrow x = \ell n(e^y - 1)$

$\boxed{\text{Πρέπει } x \in D_{fog} \Leftrightarrow \ell n(e^y - 1) \in IR \text{ που ισχύει}}$

Επομένως $\mathbf{h(x) = \ell n(e^x - 1),\ x > 0}$.

Β3. i) $h'(x) = \left[\ell n(e^x - 1)\right]' = \dfrac{(e^x - 1)'}{e^x - 1} = \dfrac{e^x}{e^x - 1} > 0$, για $x > 0$

άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο $(0\ ,\ +\infty)$ και δεν έχει ακρότατα.

ii) $h''(x) = \left(\dfrac{e^x}{e^x - 1}\right)' = \dfrac{(e^x)'\cdot(e^x - 1) - e^x\cdot(e^x - 1)'}{(e^x - 1)^2} = \dfrac{e^x\cdot(e^x - 1) - e^x\cdot e^x}{(e^x - 1)^2}$

$= \dfrac{e^{2x} - e^x - e^{2x}}{(e^x - 1)^2} = \dfrac{-e^x}{(e^x - 1)^2} < 0$, για $x > 0$

άρα η h είναι κοίλη στο $(0\ ,\ +\infty)$ και η C_h δεν έχει σημεία καμπής.

Β4. $D_h = (0\ ,\ +\infty)$

- κατακόρυφες ασύμπτωτες

$$\lim_{x\to 0^+} h(x) = \lim_{x\to 0^+} \ell n(e^x - 1) \underset{\lim\limits_{x\to 0^+}(e^x - 1) = 0}{\overset{e^x - 1 = u}{=}} \lim_{u\to 0^+} \ell n u = -\infty$$

άρα **η C_h έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την $x = 0\ (y'y)$.**

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Για να είναι η f συνεχής στο $x_0 = 0$ πρέπει και αρκεί

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$

$$\left.\begin{aligned} &\bullet\ \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}(\eta\mu x + \alpha) = \alpha \\ &\bullet\ \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} e^x = 1 \\ &\bullet\ f(0) = \eta\mu 0 + \alpha = \alpha \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\alpha = 1}$$

Είναι $f(x) = \begin{cases} 1 + \eta\mu x, & x \le 0 \\ e^x, & x > 0 \end{cases}$

Γ2.
$$\left.\begin{aligned} &\bullet\ \lim_{x\to 0^-}\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-}\frac{1 + \eta\mu x - 1}{x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{\eta\mu x}{x} = 1 \\ &\bullet\ \lim_{x\to 0^+}\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+}\frac{e^x - 1}{x} \underset{DL'H}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim_{x\to 0^-}\frac{e^x}{1} = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{f'(0) = 1}$$

Γ3. Στο διάστημα $\left[-\frac{\pi}{2}\ ,\ 1\right]$ είναι $f(x) \geq 0$, διότι

- $x \in \left[-\frac{\pi}{2}\ ,\ 0\right]$: $f(x) = 1 + ημx \geq 0$, διότι $ημx \geq -1$
- $x \in [0\ ,\ 1]$: $f(x) = e^x > 0$

Άρα $E = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{1} f(x)\,dx$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{1} f(x)\,dx$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} (1 + ημx)\,dx + \int_{0}^{1} e^x\,dx$$

$$= [x - συνx]_{-\frac{\pi}{2}}^{0} + [e^x]_0^1$$

$$= -συν0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right) + e - 1$$

$$= -1 + \frac{\pi}{2} + e - 1$$

$$= \left(\mathbf{e - 2 + \frac{\pi}{2}}\right)\ \textbf{τ.μ.}$$

Είναι $f'(x) = \begin{cases} συνx, & x < 0 \\ 1, & x = 0 \\ e^x, & x > 0 \end{cases}$

Γ4.
- f συνεχής στο $[-\pi\ ,\ 0]$
- f παραγωγίσιμη στο $[-\pi\ ,\ 0]$
- $f(-\pi) = f(0) = 1$

άρα η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θ. Rolle στο διάστημα $[-\pi\ ,\ 0]$ δηλαδή υπάρχει $\xi \in (-\pi\ ,\ 0)$, τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow συν\xi = 0$

και επειδή $\xi \in (-\pi\ ,\ 0)$ θα είναι $\boldsymbol{\xi = -\frac{\pi}{2}}$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $f'(x) = \left(\alpha\dfrac{x^4}{4} + x^3 + \dfrac{x^2}{2} + x\right)' = \alpha x^3 + 3x^2 + x + 1,\ x \in \mathbb{R}.$

Είναι $f(0) = 0$ και $f'(0) = 1$, άρα

η εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 0$ είναι

$(\varepsilon): y - f(0) = f'(0)\cdot(x - 0) \Leftrightarrow \boxed{(\varepsilon): y = x}$

Δ2. $f''(x) = (\alpha x^3 + 3x^2 + x + 1)' = 3\alpha x^2 + 6x + 1,\ x \in \mathbb{R}.$

Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα $\Delta = 36 - 12\alpha$, άρα

f κυρτή στο $\mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta \le 0$ και $3\alpha > 0 \Leftrightarrow 6 - 12\alpha \le 0$ και $\alpha > 0 \Leftrightarrow$

$3 - 12\alpha \le -36$ και $\alpha > 0 \Leftrightarrow \alpha \ge 3$ και $\alpha > 0 \Leftrightarrow \alpha \ge 3$

άρα **η ελάχιστη τιμή του α ώστε η f να είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$ είναι $\alpha = 3$**.

Για $\alpha = 3$ είναι : $f(x) = \dfrac{3}{4}x^4 + x^3 + \dfrac{1}{2}x^2 + x,\ x \in \mathbb{R}$ και

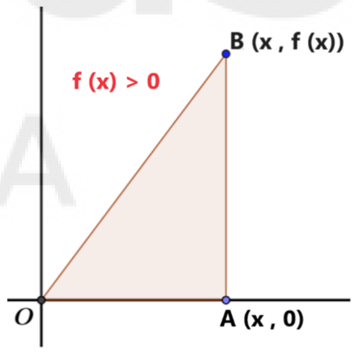
$$f'(x) = 3x^3 + 3x^2 + x + 1,\ x \in \mathbb{R}.$$

Δ3.

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \lim\limits_{x\to 0} \eta\mu f(x) \underset{\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0}{\overset{f(x)=u}{=}} \lim\limits_{u\to 0} \eta\mu u = 0 \\ \bullet\ \lim\limits_{x\to 0} \ln[f(x) - x] \underset{\lim\limits_{x\to 0}[f(x)-x]=0}{\overset{f(x)-x=u}{=}} \lim\limits_{u\to 0} \ln u = -\infty \text{ άρα } \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\ln[f(x) - x]} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\eta\mu f(x)}{\ln[f(x) - x]} = \lim_{x\to 0} \eta\mu f(x) \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{\ln[f(x) - x]} = 0\cdot 0 = 0$$

Δ4. 1[ος] τρόπος



$E = \dfrac{1}{2}\cdot(OA)\cdot(OB) = \dfrac{1}{2}\cdot x\cdot f(x)$, άρα $E(t) = \dfrac{1}{2}\cdot x(t)\cdot f(x(t))$

$E'(t) = \dfrac{1}{2}\cdot x'(t)\cdot f(x(t)) + \dfrac{1}{2}\cdot x(t)\cdot f'(x(t))\cdot x'(t) \overset{x'(t)=2}{\Rightarrow}$

$E'(t) = f(x(t)) + x(t)\cdot f'(x(t))$

και τη χρονική στιγμή t_0 που $x(t_0) = 2$

$E'(t_0) = f(x(t_0)) + x(t_0)\cdot f'(x(t_0)) = f(2) + 2\cdot f'(2) = 24 + 2\cdot 39 =$ **102 cm^2/sec**

$2^{ος}$ τρόπος

$$E = \frac{1}{2}\cdot(OA)\cdot(OB) = \frac{1}{2}\cdot x\cdot f(x) = \frac{3}{8}x^5 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{2}x^2,$$

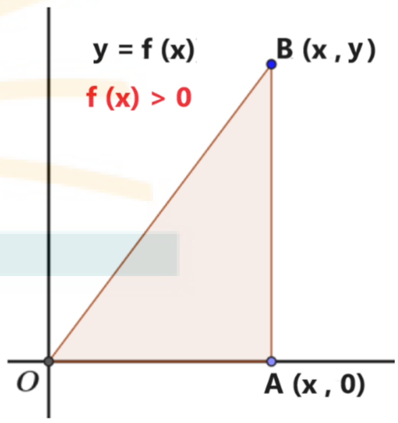
άρα $E(t) = \frac{3}{8}x^5(t) + \frac{1}{2}x^4(t) + \frac{1}{4}x^3(t) + \frac{1}{2}x^2(t)$

$$E'(t) = \frac{15}{8}x^4(t)\cdot x'(t) + 2x^3(t)\cdot x'(t) + \frac{3}{4}\cdot x^2(t)\cdot x'(t) + x(t)\cdot x'(t) \overset{x'(t)=2}{\Rightarrow}$$

$$E'(t) = \frac{15}{4}x^4(t) + 4x^3(t) + \frac{3}{2}\cdot x^2(t) + 2x(t)$$

και τη χρονική στιγμή t_0 που $x(t_0) = 2$

$E'(t_0) = 60 + 32 + 6 + 4 =$ **102 cm²/sec**



$3^{ος}$ τρόπος

$$E = \frac{1}{2}\cdot(OA)\cdot(OB) = \frac{1}{2}\cdot x\cdot y,\ \text{άρα}\ E(t) = \frac{1}{2}\cdot x(t)\cdot y(t)$$

$$E'(t) = \frac{1}{2}\cdot x'(t)\cdot y(t) + \frac{1}{2}\cdot x(t)\cdot y'(t) \overset{x'(t)=2}{\Rightarrow}$$

$$E'(t) = y(t) + \frac{1}{2}\cdot x(t)\cdot y'(t)$$

και τη χρονική στιγμή t_0 που $x(t_0) = 2$ είναι $y(t_0) = 24$

$$E'(t_0) = y(t_0) + \frac{1}{2}\cdot x(t_0)\cdot y'(t_0) \overset{x(t_0)=2}{=} 24 + y'(t_0)$$

Βρίσκουμε τον ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης

$y(t) = \frac{3}{4}x^4(t) + x^3(t) + \frac{1}{2}x^2(t) + x(t)$, άρα

$$y'(t) = \frac{3}{4}\cdot 4\cdot x^3(t)\cdot x'(t) + 3x^2(t)\cdot x'(t) + \frac{1}{2}\cdot 2\cdot x(t)\cdot x'(t) + x'(t) \overset{x'(t)=2}{\Rightarrow}$$

$y'(t) = 6x^3(t) + 6x^2(t) + 2x(t) + 2$ και τη χρονική στιγμή t_0 που $x(t_0) = 2$

$y'(t_0) = 6x^3(t_0) + 6x^2(t_0) + 2x(t_0) + 2 = 6\cdot 2^3 + 6\cdot 2^2 + 2\cdot 2 + 2 = 78$ cm/sec

Επομένως $E'(t_0) = 24 + 78 =$ **102 cm²/sec**

Επιμέλεια : Μάνος Κοθρής